Produktionstheorie

Prof. Dr. Joachim Schwalbach und Clemens Oberhammer
Humboldt-Universität zu Berlin
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Institut für Management
Spandauerstr. 1
10178 Berlin
Tel.: (030) 2093-5633
Fax: (030) 2093-5629

29. Januar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Einführung

1.1.1 Einordnung der Produktionstheorie in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre

Die Produktionstheorie beschäfigt sich mit der betrieblichen Leistungserstellung. Da dies eine zentrale Funktion eines Unternehmens ist, hat auch die Produktionstheorie zentrale Bedeutung in der Betriebswirtschaftslehre. Die Betriebswirtschaftslehre kann entweder institutionell oder funktional gegliedert werden. Die insitutionelle Gliederung orientiert sich an den verschiedenen Wirtschaftszweigen, wie z.B. Industrie, Handel, Versicherung, Bank, usw. Die Produktionstheorie spielt in jedem Bereich eine Rolle, da in jedem Wirtschaftszweig Leistung erstellt wird. Bei der funktionalen Gliederung orientiert man sich an den Funktionsbereichen eines Unternehmens. Welche Funktionsbereiche existieren und wie die Produktion einzuordnen ist, wird in Abbildung 1 veranschaulicht:

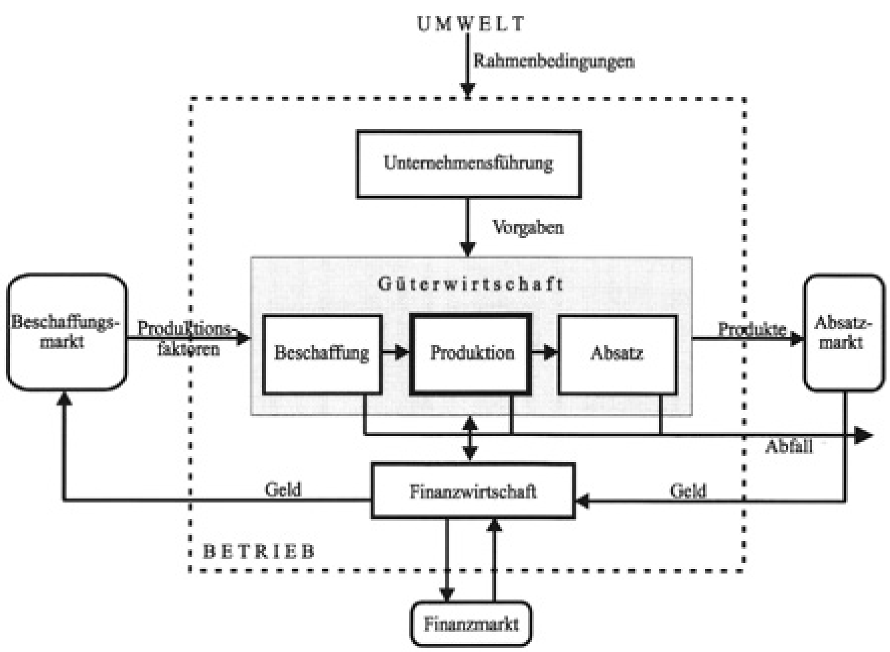

Abbildung 1: Einordnung der Produktion in den betrieblichen Kreislauf

1.1.2 Gegenstand der Produktionstheorie

Die Produktionstheorie beschäftigt sich mit der Analyse des Produktionsprozesses. Dabei geht es um die Transformation von Inputgütern in Outputgüter. Sowohl die Input- als auch die Outputgüter können materieller oder immaterieller Natur sein. Während in der traditionellen Produktionstheorie nur der Produktionsbereich im engeren Sinne betrachtet wird, hat man in der modernen Produktionstheorie erkannt, dass Produktion in allen Bereichen des Unternehmens stattfindet. So produziert die Vertriebsabteilung eine Absatzleistung oder der Einkauf Beschaffungsleistung. Auch wurde in der traditionellen Produktionstheorie nur die physische Produktion betrachtet, während mittlerweile auch die Dienstleistungsproduktion mit ihren Besonderheiten verstärkte Beachtung gefunden hat.

Während in der Volkswirtschaftslehre v. a. produktive Zusammenhänge gesamtwirtschaftlich betrachtet werden, geht es in der Betriebswirtschaftslehre mehr darum die produktiven Zusammenhänge in einem Unternehmen zu beschreiben. Trotz des unterschiedlichen Betrachtungsgegenstandes werden bei empirischen Untersuchungen oftmals dieselben Produktionsfunktionen zugrunde gelegt.

1.2 Der Produktionsprozess mit seinen Bestandteilen

In diesem Abschnitt werden die Bestandteile des Produktionsprozesses erläutert. In Abbildung 2 ist der Prozess mit seinen Bestandteilen abgebildet.

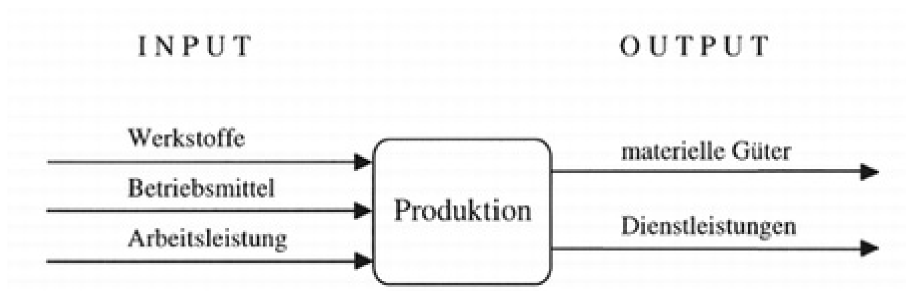

Abbildung 2: Struktur eines Produktionsprozesses

1.2.1 Produktionsfaktoren

Inputfaktoren oder *Produktionsfaktoren* sind in der Mikroökonomie Arbeit, Boden und Kapital und in der Betriebswirtschaftslehre werden sie (in Anlehnung an Erich Gutenberg) nach ihrer Verwendung im Produktionsprozess in Elementarfaktoren, dispositive Faktoren und Zusatzfaktoren unterschieden. Die Produktionsfaktoren können materieller oder immaterieller Natur sein. Materielle

Faktoren sind Sachgüter, immaterielle sind Arbeitsleistungen, Dienstleistungen und Informationen.

Elementarfaktoren bestehen aus Betriebsmitteln, Werkstoffen und objektbezogener menschlicher Arbeit. Betriebsmittel können in abnutzbare (z.B. Maschinen, Gebäude und Werkzeuge) und in nicht abnutzbare Faktoren (z.B. Grundstücke) unterteilt werden. Werkstoffe umfassen die Rohstoffe, welche den Hauptbestandteil der Produkte bilden, die Hilfstoffe, welche zwar direkt in die Produkte eingehen aber von untergeordneter Bedeutung sind und die Betriebsstoffe, welche für den Betrieb der Maschinen notwendig sind. Betriebs- und Werkstoffe verzehren sich im Produktionsprozess kurzfristig und müssen wiederholt neu beschafft werden. Es wird deshalb auch von *Verbrauchsfaktoren* oder von Repetierfaktoren (Edmund Heinen) und Potentialfaktoren (Erich Gutenberg) gesprochen.

Dem dispositiven Faktor in Form der Unternehmensführung kommt die Aufgabe der Planung, Organisation und Kontrolle des Produktionsprozesses zu. In der traditionellen Produktionstheorie wird demnach eine Trennung zwischen dispositiver und objektbezogener Arbeit vorgenommen. In der modernen Produktionstheorie ist die Grenze fließend und jede Arbeit hat sowohl dispositiven und objektbezogenen Charakter. Es wird erwartet, dass sich durch die Einbeziehung der objektbezogenen Arbeit in dispositive Aufgaben das Ergebnis des Produktionsprozesses signifikant erhöhen lässt.

Unter Zusatzfaktoren versteht man Faktoren, welche der Unternehmung zwar Kosten erzeugen, denen aber meist keine eindeutige Mengengröße zugeordnet werden kann. Dabei handelt es sich vor allem um Leistungen des Staats, der Kommunen, von Verbänden, Versicherungen, Prüfungsgesellschaften, welche zu Steuern, Gebühren, Beiträgen oder Versicherungsprämien führen. Vor allem Steuern und Beiträgen sind keine direkten Gegenleistungen zuordenbar.

1.2.2 Der Produktionsprozess

Der Produktionsprozess ist der Vorgang, in dem durch geeignete Kombination und Transformation der Einsatzfaktoren die gewünschten Produkte entstehen. Meist entstehen neben den gewünschten Gütern zusätzliche unerwünschte Güter (Abfallprodukte), welche entsorgt bzw. wiederverwendet werden müssen. Der Zusammenhang zwischen Einsatz- und Ausbringungsmenge wird dabei durch technologische, physikalische, biologische und/oder chemische Gegebenheiten determiniert.

1.2.3 Die Technologiemenge

Die Technologiemenge ist die Menge aller realisierbaren Produktionsalternativen. Sie gibt also an, welche Möglichkeiten (Produktionsalternativen) bestehen ein bestimmtes bzw. mehrere Güter herzustellen. Dabei gibt eine Produktionsalternative, auch Aktivität genannt, den mengenmäßigen Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz und Output an. Stellt man die Faktoreinsatzmengen r_i der

I Inputfaktoren durch den Inputvektor

$$\underline{r} = (r_1, ..., r_I) \in R_I^+ \tag{1}$$

dar und die Outputmengen x_m der M Güter durch den Outputvektor

$$\underline{x} = (x_1, ..., x_M) \in R_M^+, \tag{2}$$

so kann eine Aktivität bzw. Produktionsalternative durch den Vektor

$$\underline{y} = (\underline{r}; \underline{x}) \in R_{M+I}^+ \tag{3}$$

beschrieben werden. Bei der Beschreibung einer Aktivität wird somit einem bestimmten Inputvektor ein bestimmter Ausbringungsvektor zugeordnet. Dabei spielen Effizienzüberlegungen noch keine Rolle.

Die Menge aller realisierbaren Aktivitäten nennt man Technologie.

$$T := \left\{ \underline{y} = (\underline{r}; \underline{x}) \mid \underline{y} \text{ ist technisch möglich} \right\} \tag{4}$$

Sie gibt Auskunft über die technischen Möglichkeiten,welche bestehen, um ein oder mehrere Güter zu produzieren.

1.2.4 Der Effizienzbegriff: Übergang von der Technologiemenge zur Produktionsfunktion

Im letzten Abschnitt wurde die Technologiemenge erläutert. Während sie alle Möglichkeiten beschreibt, wie ein bestimmtes Gut erzeugt werden kann, wird keine Aussage über die Vorteilhaftigkeit einzelner Alternativen getroffen. Der Aspekt der Vorteilhaftigkeit wird nun in der Produktionsfunktion berücksichtigt, welche den effizienten Rand einer Technologiemenge beschreibt. Sie ist also die Menge aller effizienten Produktionsalternativen.

Um die Produktionsfunktion aus der Technologiemenge ableiten zu können, muss man wissen, was unter Effizienz hier verstanden wird. In der Literatur werden verschiedene Effizienzbegriffe erwähnt. Je nachdem, ob man die Input- oder die Outputseite betrachtet, spricht man von Input- bzw. von Outputeffizienz. Eine Alternative ist inputeffizient, wenn keine andere Alternative existiert, bei welcher mindestens der gleiche Output mit geringerem Input erzeugt wird. Eine Alternative ist hingegen outputeffizient, wenn keine andere Alternative existiert, bei der mit maximal dem gleichen Input ein höherer Output erzeugt werden kann. Insgesamt effizient ist eine Alternative, wenn sie sowohl input- als auch outputeffizient ist. Im folgenden werden die Effizienzbegriffe formal dargestellt.

Inputeffizienz

Eine Produktionsalternative $\underline{y}^0 = (\underline{r}^0; \underline{x}^0)$ ist inputeffizient, wenn keine andere Produktionsalternative $\underline{y} = (\underline{r}; \underline{x})$ existiert, für die gilt:

$$r_i \leq r_i^0 \text{ für alle } i = 1, ..., I$$

und

$$x_j \geq x_j^0 \text{ für alle } j = 1, ..., M$$

und

$$r_i < r_i^0 \text{ für mindestens ein } i.$$

Outputeffizienz

Eine Produktionsalternative $\underline{y}^0 = (\underline{r}^0; \underline{x}^0)$ ist outputeffizient, wenn keine andere Produktionsalternative $\underline{y} = (\underline{r}; \underline{x})$ existiert, für die gilt:

$$r_i \leq r_i^0 \text{ für alle } i = 1, ..., I$$

und

$$x_j \geq x_j^0 \text{ für alle } j = 1, ..., M$$

und

$$x_j > x_j^0 \text{ für mindestens ein } j.$$

Allgemeine Effizienz

Eine Produktionsalternative $\underline{y}^0 = (\underline{r}^0; \underline{x}^0)$ ist insgesamt effizient, wenn keine andere Produktionsalternative $\underline{y} = (\underline{r}; \underline{x})$ existiert, für die gilt:

$$r_i \leq r_i^0 \text{ für alle } i = 1, ..., I$$

und

$$x_j \geq x_j^0 \text{ für alle } j = 1, ..., M$$

und

$$r_i < r_i^0 \text{ für mindestens ein } i$$

oder

$$x_j > x_j^0 \text{ für mindestens ein } j.$$

Eine Alternative muss also sowohl input- als auch outputeffizient sein, damit sie insgesamt effizient ist. In einem konkreten Fall ermittelt man die effizienten Alternativen durch paarweisen Vergleich.

Die Produktionsfunktion stellt nun den mengenmäßigen Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz und Output der effizienten Alternativen dar. Formal gibt es mehrere Möglichkeiten den Zusammenhang darzustellen.
In impliziter Form:

$$F(x_1, ..., x_M; r_1, ..., r_I) = 0, \tag{5}$$

in expliziter Form:

$$(x_1, ...x_M) = f(r_1, ..., r_I) \tag{6}$$

oder in vektorieller Schreibweise:

$$\underline{x} = f\left(\underline{r}\right). \tag{7}$$

Löst man die Produktionsfunktion nach einem Einsatzfaktor auf, so erhält man die Faktoreinsatzfunktion:

$$r_k = f(r_1, ...r_{k-1}, r_{k+1}, ..r_I; x_1, ...x_M). \tag{8}$$

Die Wahl der Darstellungsform hängt u. a. von der Art der Produktionsfunktion und der mathematischen Praktikabilität ab.

1.3 Produktionstheoretische Grundlagen

1.3.1 Produktionstheoretische Grundbegriffe

Zur Beschreibung von Produktionsfunktionen sollen nun einige produktionstheoretische Grundbegriffe eingeführt werden. Es handelt sich dabei um Begriffe, welche es einem erlauben, Produktionsfunktionen zu beschreiben und zu klassifizieren. Bei der Analyse der verschiedenen Produktionsfunktionen werden sie immer wiederkehren. Aus diesem Grund ist es sehr wichtig, dass der Leser den folgenden Abschnitt verinnerlicht.

Zur Vereinfachung wird eine einstufige Einproduktproduktion angenommen, die stetig und differenzierbar ist.Die Produktionsfunktion lautet dann:

$$x = f(r_1, ..., r_I)$$

Es interessiert nun, wie sich die Ausbringungsmenge verändert, wenn sich die Einsatzmengen der Faktoren ändern. Verändert man nur die Einsatzmenge eines Einsatzfaktors und hält die übrigen Einsatzmengen konstant, so spricht man von einer Partialanalyse. Verändert man hingegen die Einsatzmengen aller i Einsatzfaktoren, dann spricht man von einer Totalanalyse. Als erstes soll die Partialanalyse und ihre Begriffe erläutert werden.

Partialanalyse

Produktivität bzw.Durchschnittsprodukt eines Faktors i:

$$\frac{x}{r_i} \tag{9}$$

Sie gibt an, wie viele Einheiten des Endprodukts pro Einheit des Faktors i produziert werden. Den Kehrwert der Produktivität nennt man *Produktionskoeffizient*:

$$a_i = \frac{r_i}{x} \tag{10}$$

Er gibt an, wie viele Einheiten des Faktors i nötig sind, um eine Einheit des Endprodukts herzustellen.

Partielle Grenzproduktivität eines Faktors i:

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} \tag{11}$$

Sie gibt an, um wieviel sich die Ausbringungsmenge bei einer marginalen Veränderung der Inputmenge des Faktors i verändert.

$\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0$: Eine Erhöhung der Einsatzmenge des Faktors i führt zu einer Erhöhung der Ausbringungsmenge. Man spricht auch von positiven Grenzertrag.

$\frac{\partial x}{\partial r_i} = 0$: Eine Veränderung der Einsatzmenge des Faktors i hat keinen Einfluss auf die Ausbringungsmenge. Der Grenzertrag ist null.

$\frac{\partial x}{\partial r_i} < 0$: Eine Erhöhung der Einsatzmenge des Faktors i hat eine Verringerung der Ausbringungsmenge zur Folge. In diesem Fall ist der Grenzertrag kleiner null.

Um zu untersuchen, wie sich der Grenzertrag verändert, wenn man die Einsatzmenge des Faktors i variiert, muss man den Grenzertrag nach r_i differenzieren:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial r_i}\right)}{\partial r_i}.$$

$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} > 0$: zunehmende Grenzerträge. Mit zunehmendem Einsatz des Faktors i steigt der Grenzertrag.

$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} = 0$: konstante Grenzerträge. Der Grenzertrag verändert sich nicht mit Variation der Einsatzmenge.

$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} < 0$: abnehmende Grenzerträge. Der Grenzertrag nimmt mit zunehmendem Faktoreinsatz ab.

Partielles Grenzprodukt:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot dr_i \tag{12}$$

Das partielle Grenzprodukt gibt bei hinreichend kleinen Mengenänderungen an, um wie viele Einheiten sich die Ausbringungsmenge verändert, wenn sich die Einsatzmenge des Faktors i tatsächlich um die Menge dr_i verändert. Man erhält es, indem man die Grenzproduktivität mit der tatsächlichen Mengenänderung dr_i multipliziert.

Bis jetzt sind nur absolute Mengenveränderungen untersucht worden. Oft möchte man aber auch relative Mengenänderungen untersuchen. Dazu bedient man sich Elastizitäten, welche relative Größen ins Verhältnis setzen. Im Rahmen der Partialanalyse wird oft die Produktionselastizität verwendet.

Produktionselastizität

$$\varepsilon_i = \frac{\frac{\partial x}{x}}{\frac{\partial r_i}{r_i}} = \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot \frac{r_i}{x} \tag{13}$$

Sie gibt an, um wieviel sich die Ausbringungsmenge prozentual verändert, wenn sich die Einsatzmenge um einen marginalen Prozentsatz verändert. Der zweite

Term zeigt, dass die Produktionselastizität gleich dem Produkt aus Grenzproduktivität und Produktionskoeffizient ist. Nachdem nun die Begriffe der Partialanalyse erläutert worden sind, sollen nun die Begriffe der Totalanalyse besprochen werden.

Totalanalyse

Während bei der Partialanalyse nur die Einsatzmenge *eines* Produktionsfaktors variiert wird, betrachtet man bei der Totalanalyse die Auswirkung von Veränderungen der Einsatzmenge *aller* Produktionsfaktoren.

Totales Grenzprodukt

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot dr_1 + ... + \frac{\partial x}{\partial r_I} \cdot dr_I = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot dr_i.$$

Das totale Grenzprodukt gibt an, um wieviel sich die Ausbringungsmenge verändert, wenn die Einsatzmengen aller Faktoren um einen hinreichend kleinen Betrag verändert werden. Es entspricht der Summe der partiellen Grenzprodukte.

Niveauvariation

Bei einer Niveauvariation werden die Einsatzmengen aller Faktoren mit dem gleichen Betrag multipliziert. Das Einsatzverhältnis der Faktoren untereinander bleibt also konstant. Es ändert sich nur das Produktionsniveau. In der Ausgangssituation werde

$$x^0 = f\left(r_1^o, ..., r_I^0\right)$$

produziert.

Nun werden alle Einsatzmengen mit einem Proportionalitätsfaktor λ, $\lambda > 0$ multipliziert und man erreicht ein neues Produktionsniveau

$$x^1 = f\left(\lambda \cdot r_1^0, ..., \lambda \cdot r_I^0\right).$$

Kann man eine Produktionsfunktion allgemein in der Form

$$\lambda^t \cdot x = f\left(\lambda \cdot r_1, ..., \lambda \cdot r_I\right)$$

schreiben, so sagt man sie sei homogen vom Grade t. Dies bedeutet, dass bei einer Multiplikation der Einsatzmengen aller Faktoren mit λ sich die Ausbringungsmenge um den Faktor λ^t verändert. Hinsichtlich des Homogenitätsgrades unterscheidet man drei Bereiche:

$t = 1$: Die Produktionsfunktion ist homogen vom Grade eins oder linearhomogen. Die Ausbringungsmenge verändert sich im gleichen Ausmaß wie die Faktoreinsatzmengen.

$t > 1$: Die Produktionsfunktion ist überlinearhomogen. Die Ausbringungsmenge steigt bei einer Niveauvariation überproportional an.

$t < 1$: Die Produktionsfunktion ist unterlinearhomogen. Bei einer Niveauvariation steigt die Ausbringungsmenge unterproportional.

Die Auswirkungen einer Niveauvariation werden auch durch die Skalenelastizität ausgedrückt.

Skalenelastizität

$$t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{x} \tag{14}$$

Wie man sieht, entspricht die Skalenelastizität bei homogenen Produktionsfunktionen dem Homogenitätsgrad. Sie gibt an, um wieviel sich die Ausbringungsmenge prozentual verändert, wenn die Einsatzmengen aller Faktoren um den gleichen marginalen Prozentsatz verändert werden. Ist die Skalenelastizität größer eins, so spricht man von zunehmenden Skalenerträgen, ist sie gleich eins, so spricht man von konstanten Skalenerträgen und ist sie kleiner eins, so liegen abnehmende Skalenerträge vor.

Isoquante

Möchte man das Austauschverhältnis der Einsatzfaktoren untersuchen, so bedient man sich der Isoquante. Die Isoquante ist der geometrische Ort aller Faktoreinsatzkombinationen, welche die gleiche Ausbringungsmenge erzeugen. Formal kann sie wie folgt dargestellt werden:

$$r_m = f\left(r_1, .., r_{m-1}, r_{m+1}, ..r_I, \overline{x}\right) \tag{15}$$

Oft ist von Interesse, wie die einzelnen Einsatzfaktoren gegeneinander substituiert werden können. Ein Maß, welches die Substitutionsmöglichkeit beschreibt, ist dabei die *Grenzrate der Substitution*. Sie gibt an, um wieviel man die Einsatzmenge eines Faktors verringern kann, wenn die Einsatzmenge eines anderen Faktors um eine Einheit erhöht wird und die Ausbringungsmenge konstant gehalten wird. Je größer sie absolut ist, desto einfacher kann durch den Faktor, dessen Einsatzmenge erhöht wird, der andere Faktor substituiert werden.

Formal:

$$s_{ij} = -\frac{\partial r_i}{\partial r_j} \qquad i \neq j \text{ und } x = const. \tag{16}$$

Die Grenzrate der Substitution entspricht dem Verhältnis der Grenzproduktivitäten zueinander. Dies kann ganz einfach gezeigt werden. Bei zwei Einsatzfaktoren und einem Produkt hat das totale Grenzprodukt folgende Form:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot dr_1 + \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot dr_2$$

Entlang einer Isoquante verändert sich die Ausbringungsmenge definitionsgemäß nicht.

$$dx = 0$$

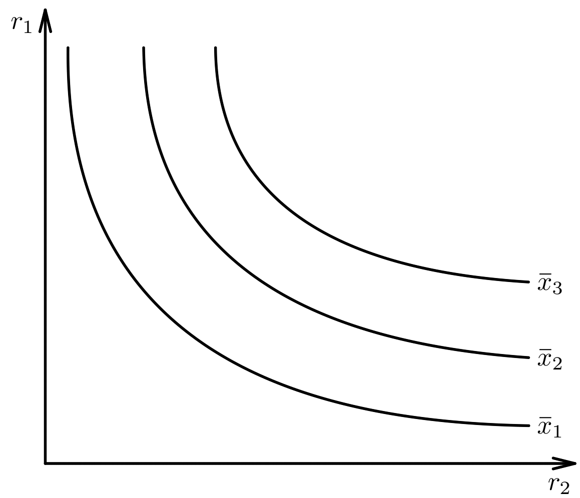

Abbildung 3: Isoquante einer substitutionalen Produktionsfunktion

oder:

$$\frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot dr_1 + \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot dr_2 = 0$$

umgeformt:

$$-\frac{dr_1}{dr_2} = s_{12} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_2}}{\frac{\partial x}{\partial r_1}} \tag{17}$$

Man sieht also, dass die Grenzrate der Substitution dem reziproken Verhältnis der Grenzproduktivitäten entspricht.

In Abbildung 3 sind für verschiedene Produktionsniveaus die Isoquanten einer substitutionalen Produktionsfunktion dargestellt.

Die Steigung der Isoquante ist dabei die Grenzrate der Substitution.

Arten von Produktionsfunktionen

Produktionsfunktionen können nach verschiedenen Aspekten klassifiziert werden. Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit sollen hier ein paar Gliederungsmöglichkeiten vorgestellt werden.

Zum einen können Produktionsfunktionen nach dem Maß der Austauschfähigkeit der Einsatzfaktoren differenziert werden. Kann eine bestimmte Ausbringungsmenge nur mit einer bestimmten Kombination von Einsatzfaktoren effizient hergestellt werden, so spricht man von einer limitationalen Produktionsfunktion. Die Grenzrate der Substitution nimmt dann den Wert null an und die Isoquante reduziert sich auf einen Punkt. Können hingegen die Einsatzfaktoren vollkommen gegeneinander substituiert werden, dann spricht man von vollkommener Substitution. Hier kann eine bestimmte Ausbringungsmenge selbst dann effizient produziert werden, wenn ein Produktionsfaktor überhaupt

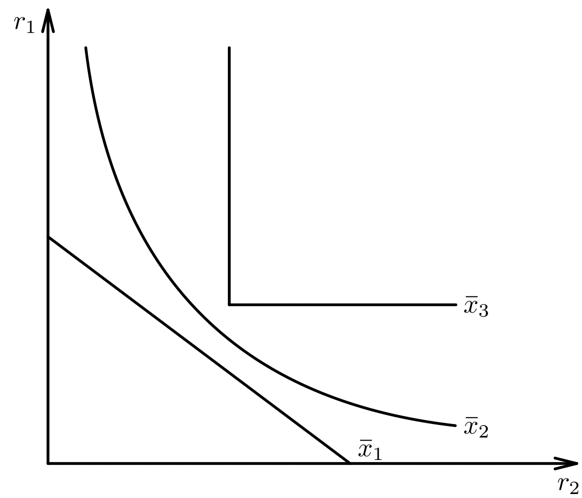

Abbildung 4: Komplementaritätsgrade von Produktionsfunktionen

nicht eingesetzt wird. Zwischen vollkommener Substitution und vollkommener Limitationalität liegt die periphere Substitution, bei der die Einsatzfaktoren teilweise gegeneinander ausgetauscht werden können. Abbildung 4 zeigt die zu den jeweiligen Produktionsfunktionen gehörenden Isoquanten.

Substitutionale Produktionsfunktionen können weiter in klassische und neoklassische Produktionsfunktionen unterteilt werden. Wie die jeweiligen Produktionsfunktionen aussehen, wird weiter unten erläutert. Limitationale Produktionsfunktionen können in linear-limitationale und nicht linear-limitationale Produktionsfunktionen unterteilt werden. Bei linear-limitationalen Produktionsfunktionen führt eine Verdoppelung der Ausbringungsmenge immer zu einer Verdoppelung der Einsatzmengen aller Faktoren. Dies bedeutet, dass die Produktionskoeffizienten aller Einsatzfaktoren konstant sind. Bei nicht linear-limitationalen Produktionsfunktionen sind die Produktionskoeffizienten teilweise variabel. Das Verhältnis zwischen der Einsatzmenge eines Faktors und der Ausbringungsmenge ist nun nicht mehr konstant.

Ein anderer Aspekt, nach welchem Produktionsfunktionen unterteilt werden können, ist die Zeit. So gibt es statische Produktionsfunktionen, welche zeitliche Aspekte nicht beachten, und dynamische. Dynamische Produktionsfunktionen können wiederum danach unterteilt werden, ob sie langfristige oder kurzfristige Aspekte berücksichtigen. Einmal werden Aspekte wie Produktionsdauer oder Transportdauer beachtet, das andere mal Erfahrungseffekte und die Entwicklung der Produktionsbedingungen im Zeitablauf. Auch kann man Produktionsfunktionen nach der Anzahl der produzierten Güterarten differenzieren. Bei den traditionellen Produktionsfunktionen wird davon ausgegangen, dass nur eine Produktart hergestellt wird. In der modernen Produktionstheorie wird hingegen oft ein Mehr-Produkt-Unternehmen unterstellt. Dabei kann man zwischen verbundener und unverbundener Produktion unterscheiden. Von unverbundener Produktion spricht man, wenn keine Verbindung zwischen den Produktionsprozessen der verschiedenen Güter besteht. Dies ist eher der Ausnahmefall. In der Realität findet man häufiger die verbundene Produktion. Hier kann man wiederum unterscheiden, welche Art von Verbindung zwischen den Produkten besteht. Zum einen gibt es die Alternativproduktion, bei der die Güter um die Produktionsfaktoren konkurrieren. Zum anderen gibt es die Kuppelproduktion, bei welcher aufgrund technologischer Bedingungen immer mehrere Produkte entstehen. Das Verhältnis zwischen den Ausbringungsmengen kann dabei konstant (starre Kuppelproduktion) oder variabel (elastische Kuppelproduktion) sein. Betrachtet man Produktionsprozesse genau, so fällt auf, dass beinahe jeder Produktionsprozess eine Kuppelproduktion darstellt. Bei jeder Produktion eines Gutes fallen andere Produkte wie Abfallprodukte oder Nebenprodukte an, deren Entstehung nicht vermieden werden kann bzw. gewünscht wird.

Verbundene Mehr-Produkt-Produktionsfunktionen können auch danach unterschieden werden, ob Kostenkomplementaritäten zwischen den Produkten vorliegen. Kostenkomplementaritäten liegen dann vor, wenn es billiger ist zwei Produkte zusammen anstatt getrennt zu produzieren.

Die letzte Gliederungsmöglichkeit, die hier erwähnt werden soll, ist der Zusammenhang zwischen Input und Outputmengen. Produktionsfunktionen können unterschieden werden, ob sie einen deterministischen oder einen stochastischen Zusammenhang unterstellen.

Natürlich können alle erwähnten Gliederungsaspekte auch kombiniert werden. Wie man unschwer an der Gliederung dieses Buches erkennen kann, wird auch hier eine gemischte Form der Gliederung verwendet.

1.3.2 Aufgaben

1. Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

$$x = 2r_1^2 \cdot r_2 + \frac{1}{2} \cdot r_3$$

a) Bestimmen Sie für alle Einsatzfaktoren die Produktivität, den Produktionskoeffizienten, die Grenzproduktivität und die Produktionselastizität!
b) Zeichnen Sie die Produktionsfunktion in Abhängigkeit des Einsatzfaktors 2. Wie verändert sich die Produktionsfunktion, wenn man die Einsatzmengen der anderen Faktoren variiert? Skizzieren Sie dies beispielhaft.
c) Machen Sie nun eine Totalanalyse! Handelt es sich um eine homogene Produktionsfunktion?

2. Gegeben ist folgende Produktionsfunktion

$$x = 3r_1 + 2r_2$$

a) Berechnen Sie die partielle Grenzproduktivität des Faktors r_1 aus der Ertragsfunktion.

b) Was besagt eine positive partielle Grenzproduktivität? Sind Fälle denkbar, in denen die Grenzproduktivität negativ ist?
c) Wie groß ist die Änderung der Grenzproduktivität von r_1?
d) Berechnen Sie das partielle Grenzprodukt von r_2, wenn dieser Faktor um 0,1 Mengeneinheiten erhöht wird.

3. Gegeben ist folgende Produktionsfunktion:

$$x = \sqrt{r_1 r_2}$$

a.) Berechnen Sie das totale Grenzprodukt, wenn von jedem Faktor bisher 2 Einheiten eingesetzt wurden und sich die Einsatzmenge beider Faktoren um eine Einheit erhöht.
b.) Wie groß ist die Produktionselastizität von r_1, wenn jeweils 2 Mengeneinheiten jedes Faktors eingesetzt werden. Was besagt diese Elastizität?

4. Die folgenden Produktionsfunktionen sind auf Homogenität und gegebenenfalls auf den Homogenitätsgrad zu prüfen:

$$\begin{aligned}
\text{a) } x &= 1,5r_1\sqrt{r_2} \\
\text{b) } x &= 1,5r_1 + \sqrt{r_2} \\
\text{c) } x &= 1,5r_1 + r_2 \\
\text{d) } x &= 1,5r_1\sqrt{r_2} + \sqrt{{r_2}^3} \\
\text{e) } x &= \frac{1,5r_1\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1 + r_2}}
\end{aligned}$$

5. Gegeben seien folgende Produktionsfunktionen:

$$\begin{aligned}
\text{a) } x &= 1,5r_1\sqrt{r_2} \\
\text{b) } x &= 1,5r_1 + \sqrt{r_2} \\
\text{c) } x &= 1,5r_1 + r_2 \\
\text{d) } x &= 1,5r_1\sqrt{r_2} + \sqrt{{r_2}^3}
\end{aligned}$$

Berechnen Sie hierfür jeweils:
i) Die partielle Grenzproduktivität von r_2
ii) Die Änderung der Grenzproduktivität von r_2
iii) Das partielle Grenzprodukt von r_1 wenn r_1 um $0,2$ Mengeneinheiten erhöht wird.
iv) Das totale Grenzprodukt an der Stelle $r_1 = 1$ und $r_2 = 1$, wenn beide Faktoren um eine Einheit erhöht werden.

v) Wie groß ist die Produktionselastizität von r_1 an der Stelle $r_1 = 4$ und $r_2 = 2$.

6. Gegeben sei die Produktionsfunktion $x = r_1 + 2{r_1}^{0,5}{r_2}^2 + r_3$. Berechnen Sie an der Stelle $(x; r_1; r_2; r_3) = (x; 9; 1; 4)$
a) alle drei Produktionselastizitäten und
b) alle drei Durchschnittserträge!
c) An welcher Stelle ist die Funktion homogen?

7. Gegeben sei die Produktionsfunktion $x = \sqrt{r_j r_i} = {r_j}^{0,5}{r_i}^{0,5}$. Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution zwischen r_j und r_i für $r_j = 1$ und $r_i = 4$.

8. Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution s_{12}für die Produktionsfunktion $x = 2r_1 + 3r_2$.

9. Für die Produktionsfunktion $x = 4r_1 + 2r_1r_2$ gelte für einen bestimmten Produktionspunkt $(x, r_{1,} r_2)$ alsGrenzrate der Substitution:

$$s_{12} = -\frac{dr_1}{dr_2} = 0,4$$

Bestimmen Sie die zu dieser Substitutionsrate zugehörigen Einsatzmengen von r_1 und r_2 für eine Ausbringungsmenge von $x = 20$.

1.4 Kostentheoretische Grundbegriffe

Obwohl sich die Produktionstheorie überwiegend mit produktiven Zusammenhängen beschäftigt, soll hier auch der Kostenaspekt betrachtet werden. Zuerst soll der Übergang von der mengenmäßigen zur wertmäßigen Betrachtung beschrieben werden. Danach sollen einige kostentheoretische Grundbegriffe eingeführt werden, welche im weiteren Verlauf für die Analyse verschiedener Kostenfunktionen verwendet werden.

1.4.1 Übergang von der mengen- zur wertmäßigen Betrachtung

In der Produktionstheorie werden nur quantitative Zusammenhänge dargestellt. Es wird untersucht, wie die Mengen der Einsatzfaktoren von der Menge der hergestellten Güter abhängen. Nun ist aber meist von Interesse, welche Kosten bei einer bestimmten Ausbringungsmenge entstehen. Dafür muss man nun die Einsatzfaktoren mit ihren Faktorpreisen bewerten. Gibt es mehrere Möglichkeiten eine bestimmte Menge an Produkteinheiten effizient zu produzieren, so stellt sich das Problem die kostengünstigste Faktoreinsatzkombination zu finden. Diese Faktoreinsatzkombination nennt man die Minimalkostenkombination. Wie man die Minimalkostenkombination bei limitationalen und substitutionalen Produktionsfunktionen findet und wie man daraus die Kostenfunktion ableitet, soll in den nächsten beiden Abschnitten allgemein gezeigt werden.

Minimalkostenkombination bei limitationalen Produktionsfunktionen

Sucht man die Kombination von Einsatzfaktoren, welche bei gegebener Ausbringungsmenge die geringsten Kosten verursacht, so genügt es, wenn man sich auf die effizienten Prozesse beschränkt. Denn nur effiziente Kombinationsprozesse können auch kostenminimal sein. Dies macht die Bestimmung der Minimalkostenkombination bei einer limitationalen Produktionsfunktion einfach. Da es bei einer limitationalen Produktionsfunktion für jede Ausbringungsmenge nur eine effiziente Faktoreinsatzkombination gibt, ist diese Kombination auch gleichzeitig die Minimalkostenkombination.

Minimalkostenkombination bei substitutionalen Produktionsfunktionen

Bei substitutionalen Produktionsfunktionen ist die Bestimmung der Minimalkostenkombination bedeutend schwieriger. Um das Problem einfach zu halten, soll hier eine Produktionsfunktion betrachtet werden, bei der ein Gut mit zwei Produktionsfaktoren produziert wird. Zudem soll die Bestimmung der Minimalkostenkombination hier nur graphisch geschehen. Die algebraische Bestimmung soll dann für die jeweilige Produktionsfunktion weiter unten erfolgen.

Möchte man die Minimalkostenkombination einer substitutionalen Produktionsfunktion finden, so geht man von einer festen Ausbringungsmenge aus und sucht die Kombination von Einsatzfaktoren, welche die geringsten Kosten erzeugt. Graphisch bedeutet dies, dass man den Punkt auf der entsprechenden Isoquante sucht, der mit den niedrigsten Kosten verbunden ist. Die Höhe der Kosten wird dabei durch eine Kostenisoquante dargestellt. Die Kostenisoquante ist der Ort aller Faktoreinsatzkombinationen, welche bei gegebenen Faktorpreisen zu den gleichen Kosten führen. Im Zwei-Faktor Fall hat die Kostenfunktion abhängig von den Einsatzfaktoren folgende Form:

$$K = q_1 r_1 + q_2 r_2$$

Dabei sind K die anfallenden Kosten und q_i die Faktorpreise. Die Kostenisoquante erhält man nun, indem man die Kosten konstant setzt und die Kostenfunktion nach r_1 oder r_2 auflöst:

$$r_1 = \frac{\overline{K}}{q_1} - \frac{q_2}{q_1} r_2$$

Graphisch sieht das dann wie folgt aus (siehe Abbildung 5):

Je weiter eine Kostenisoquante im Nord-Osten liegt, desto höher sind die Kosten, welche sie widerspiegelt. Möchte man nun bei gegebener Ausbringungsmenge die Minimalkostenkombination finden, so sucht man auf der zugehörigen Ertragsisoquante den Punkt, welcher auf der niedrigsten Kostenisoquante liegt.

In Abbildung 6 spiegelt die Ertragsisoquante die gewünschte Ausbringungsmenge wider. Es wird deutlich, dass der Tangentialpunkt der mittleren Kostenisoquante mit der Ertragsisoquante die Minimalkostenkombination darstellt. Da die Steigung der Kostenisoquante das Preisverhältnis ist und die Steigung

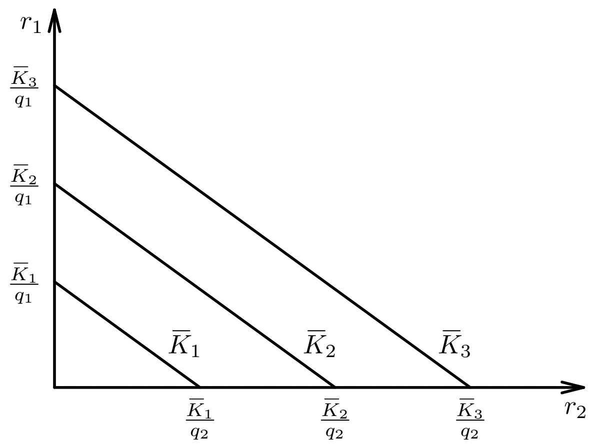

Abbildung 5: Kostenisoquanten

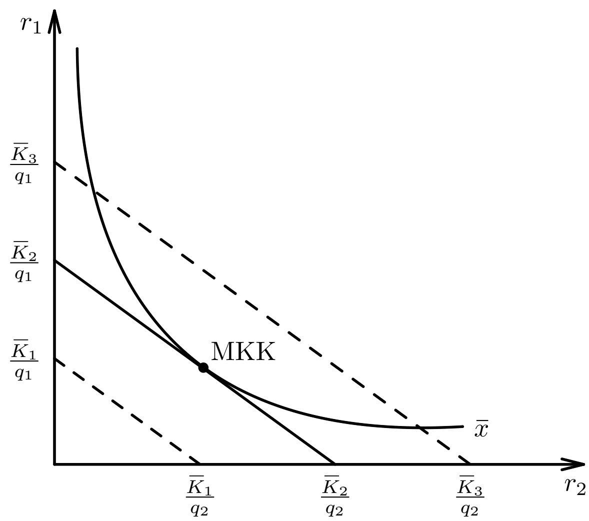

Abbildung 6: Minimalkostenkombination

der Ertragsisoquante die Grenzrate der Substitution, muss im Kostenoptimum gelten:

$$s_{12} = -\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{q_2}{q_1}$$

Dies gilt allerdings nur für konvex verlaufende Ertragsisoquanten. Verläuft die Ertragsisoquante hingegen linear oder konkav, so ist eine Randlösung optimal. Abbildung 7 verdeutlicht dies für eine linear verlaufende Ertragsisoquante:

Wie man in der Graphik sieht, existieren immer zwei Randlösungen. Opti-

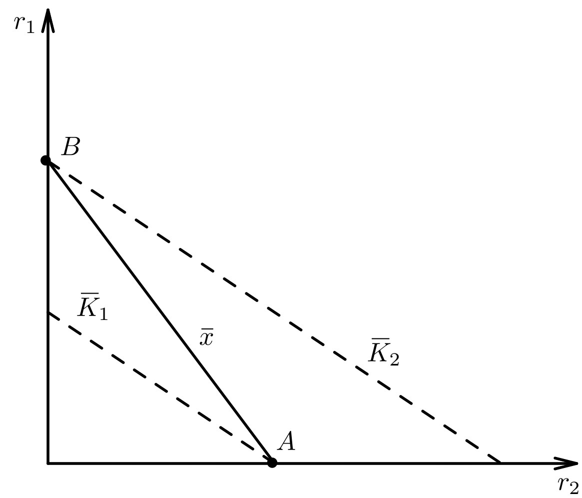

Abbildung 7: Kostenminimum bei linear verlaufenden Ertragsisoquanten

mal ist die Randlösung, welche den Schnittpunkt mit der weiter im Süd-Westen liegenden Kostenisoquante widerspiegelt. In der Graphik ist es die Randlösung, wo sich die Kostenisoquante K_1 und die Ertragsisoquante x berühren (Punkt A). Algebraisch gibt es mehrere Möglichkeiten die kostenoptimale Randlösung zu bestimmen. Bei der einfachsten Methode, welche auch bei konkaven Ertragsisoquanten anwendbar ist, berechnet man die zu der jeweiligen Randlösung gehörenden Kosten und vergleicht diese.

Kostentheoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden kostentheoretische Begriffe eingeführt, welche zur Beschreibung von Kostenfunktionen benötigt werden.

Gesamtkosten

Die Gesamtkosten sind die Kosten, die bei einer bestimmten Ausbringungsmenge insgesamt anfallen.

$$K = K\,(x) \tag{18}$$

Sie setzen sich aus den variablen und den fixen Kosten zusammen.

$$K\,(x) = K_v + K_f \tag{19}$$

Variable Kosten

Die variablen Kosten variieren mit der Höhe der Ausbringungsmenge.

$$K_v = K_v\,(x) \tag{20}$$

Fixe Kosten

Im Gegensatz zu den variablen Kosten verändern sich die fixen Kosten bei einer Variation der Ausbringungsmenge nicht.

$$K_f = c \tag{21}$$

Sie fallen auch an, wenn überhaupt nicht produziert wird. Eine spezielle Form von fixen Kosten sind sprung- oder intervallfixe Kosten. Bei Änderungen der Ausbringungsmenge innerhalb gewisser Intervalle sind sie konstant. Wird jedoch die Ausbringungsmenge über ein bestimmtes Intervall hinaus erhöht oder verringert, so erhöhen bzw. verringern sich auch die sprungfixen Kosten. Erklärt werden können diese Kosten mit Kapazitätsgrenzen. Wird z.B. die Kapazität einer Maschine überschritten, so muss eine neue Maschine angeschafft werden, um die gewünschte Ausbringungsmenge fertigen zu können. Es fallen zusätzliche Kosten in Form von zusätzlichen Abschreibungen für die neue Maschine an. Wird hingegen die Ausbringungsmenge verringert, so kann eine Maschine verkauft werden und die Abschreibungen verringern sich dementsprechend. Ob bestimmte Kosten fix oder variabel sind, hängt auch vom Betrachtungszeitraum ab.

Gesamtkosten pro Stück

Die Gesamtkosten pro Stück geben an, was die Erzeugung einer Produktionseinheit kostet, wenn man annimmt, dass die Kosten gleichmäßig auf alle Produktionseinheiten verteilt werden. Man erhält sie, indem man die Gesamtkosten durch die Ausbringungsmenge dividiert:

$$k\left(x\right) = \frac{K\left(x\right)}{x} \tag{22}$$

Analog werden auch die Begriffe Stückgesamtkosten, Durchschnittskosten oder Stückkosten verwendet:

Variable Durchschnittskosten

Die variablen Durchschnittskosten erhält man, indem man die variablen Kosten durch die Ausbringungsmenge dividiert:

$$k_v\left(x\right) = \frac{K_v\left(x\right)}{x} \tag{23}$$

Fixe Durchschnittskosten

Analog dazu erhält man die fixen Durchschnittskosten, wenn man die Fixkosten durch die Ausbringungsmenge dividiert.

$$k_f = \frac{K_f}{x} \tag{24}$$

Aus der Zusammensetzung der Gesamtkosten

$$K\left(x\right) = K_f + K_v\left(x\right)$$

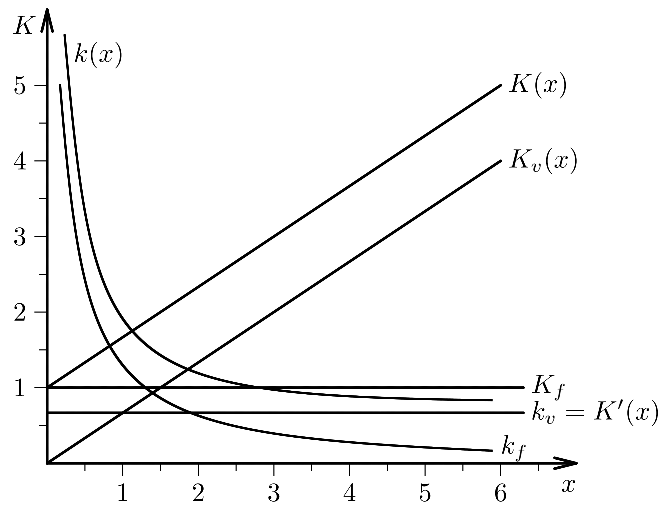

Abbildung 8: Lineare Kosten

sieht man, dass die Gesamtkosten pro Stück gleich der Summe der variablen und der fixen Durchschnittskosten sind.

$$\frac{K(x)}{x} = \frac{K_f}{x} + \frac{K_v(x)}{x}$$

Weiter sieht man, dass die variablen Durchschnittskosten immer unterhalb der insgesamten Stückkosten verlaufen und sich mit zunehmender Ausbringungsmenge an diese annähern.

Grenzkosten

Unter Grenzkosten versteht man die Veränderung der Gesamtkosten bei einer marginalen Veränderung der Ausbringungsmenge. Ist die Kostenfunktion stetig und differenzierbar, so erhält man sie, indem man die Gesamtkostenfunktion nach der Ausbringungsmenge x differenziert:

$$\frac{dK(x)}{dx} = \frac{dK_f}{dx} + \frac{dK_v(x)}{dx}$$

Da die Fixkosten unabhängig von der Ausbringungsmenge sind, ist

$$\frac{dK_f}{dx} = 0.$$

Somit entsprechen die Grenzkosten der ersten Ableitung den variablen Kosten

$$\frac{dK(x)}{dx} = \frac{dK_v(x)}{dx} = K'(x).$$

In den Abbildungen 8, 9 und 10 sind ein paar typische Kostenverläufe mit den zugehörigen Grenz- und Durchschnittskostenverläufen dargestellt.

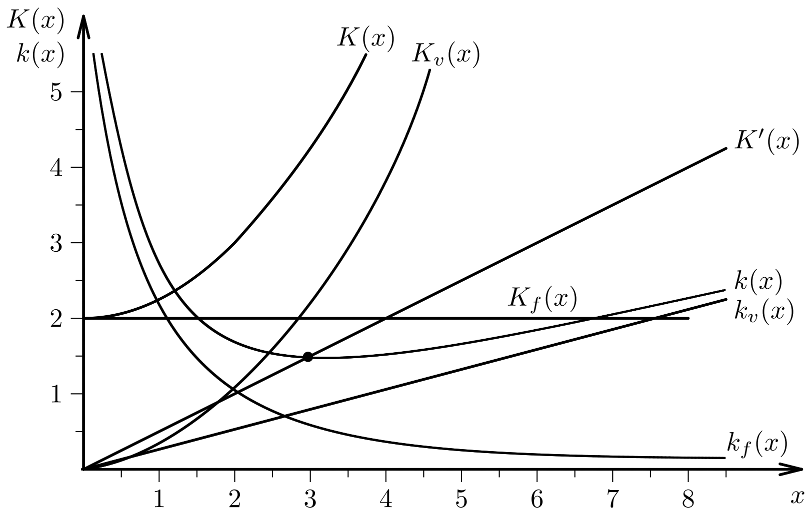

Abbildung 9: Progressive Kosten

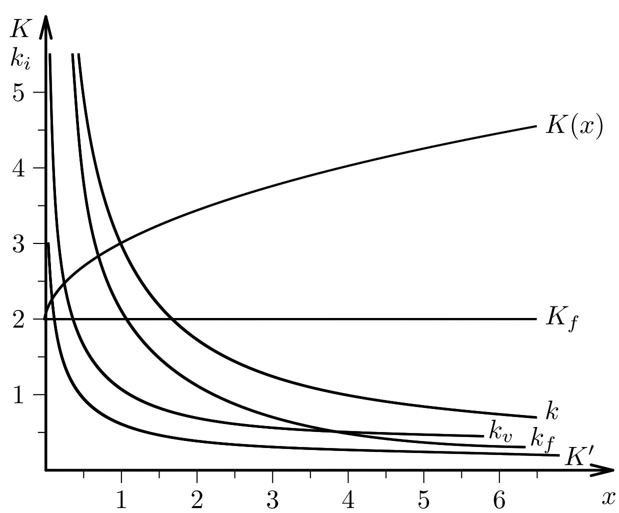

Abbildung 10: Degressive Kosten

1.4.2 Aufgaben und Beispiele

Beispiel

1. Die zu einem Produktionsprozess gehörende Kostenfunktion hat folgende Form:

$$K = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 400$$

a) Berechnen Sie die Kosten für die Ausbringungsmenge $x = 10$.
b) Berechnen Sie die variable und die fixe Durchschnittskostenfunktion. Zeigen Sie, dass sich die gesamte Durchschnittskostenfunktion aus den beiden berechneten ergibt.
c) Berechnen Sie die Grenzkostenfunktion und untersuchen Sie deren Verlauf.

zu a) $K = \frac{1}{10} \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 50 \cdot 10 + 400 = 700$

zu b) variable Durchschnittskostenfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{K_v}{x} &= \frac{\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x}{x} \\ &= \frac{1}{10}x^2 - 3x + 50 \end{aligned}$$

fixe Durchschnittskostenfunktion:

$$\frac{K_f}{x} = \frac{400}{x}$$

gesamte Durchschnittskostenfunktion:

$$\frac{K}{x} = \frac{\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 400}{x} = \frac{1}{10}x^2 - 3x + 50 + \frac{400}{x}$$

Man sieht, dass die gesamten Stückkosten der Summe der variablen und der fixen Durchschnittskosten entsprechen.

zu c)

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{3}{10}x^2 - 6x + 50$$

Den Verlauf der Grenzkostenfunktion untersucht man, indem man die zweite Ableitung bildet:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \frac{3}{5}x - 6$$

Man sieht, dass die Grenzkosten bis zu der Ausbringungsmenge $x = 10$ fallen. Danach steigen sie wieder an.

2. Es liegen folgende Produktionsfunktionen vor:

$$
\begin{aligned}
1.)\ x &= r_1 r_2 \\
2.)\ x &= r_1 + r_2 \\
3.)\ x &= r_1^2 + r_2^2 \\
4.)\ r_1 &= 2x \\
r_2 &= 3x
\end{aligned}
$$

Die Preise der Einsatzfaktoren betragen $q_1 = 1$ und $q_2 = 2$. Leiten Sie für jede Produktionsfunktion die Minimalkostenkombination graphisch für die Ausbringungsmenge $x = 5$ her. Bevor die Minimalkostenkombination für jede einzelne Produktionsfunktion ermittelt wird, soll die Funktion der Kostenisoquante bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
K &= q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2 \\
&= r_1 + 2r_2 \\
&\Leftrightarrow r_1 = K - 2r_2
\end{aligned}
$$

zu 1.) Die Isoquantenfunktion für $x = 5$ sieht wie folgt aus:

$$r_1 = \frac{5}{r_2}$$

In Abbildung 11 ist sie graphisch dargestellt.

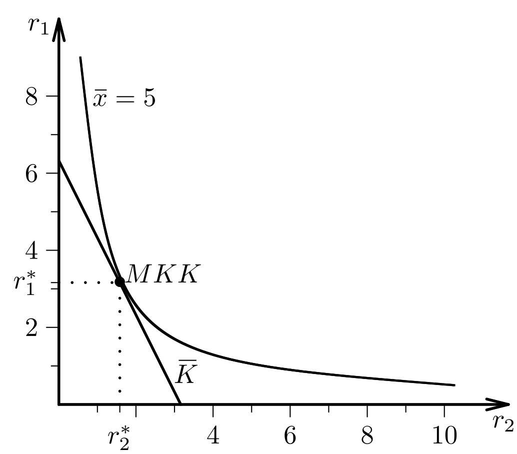

Abbildung 11: Kostenminimum Beispielaufgabe 2.1)

zu 2.) Die Isoquantenfunktion für $x = 5$ sieht wie folgt aus (vgl. Abbildung 12):

$$r_1 = 5 - r_2$$

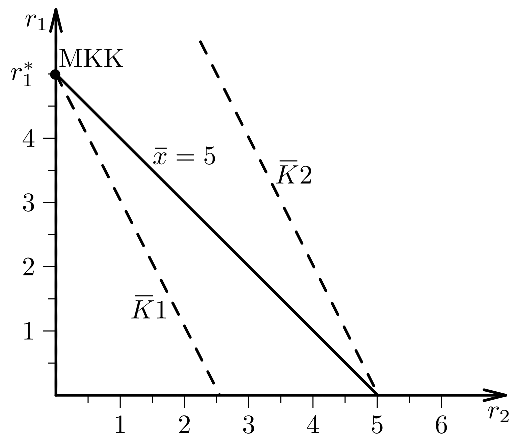

Abbildung 12: Kostenminimum Beispielaufgabe 2.2)

Man sieht, dass wegen des linearen Verlaufs der Isoquante eine Randlösung kostenminimal ist. In diesem Fall ist $r_1 = 5$ und $r_2 = 0$ kostenminimal.

zu 3.) Die Isoquantenfunktion hat folgende Form (siehe Abbildung 13):

$$r_1 = \sqrt{5 - r_2}$$

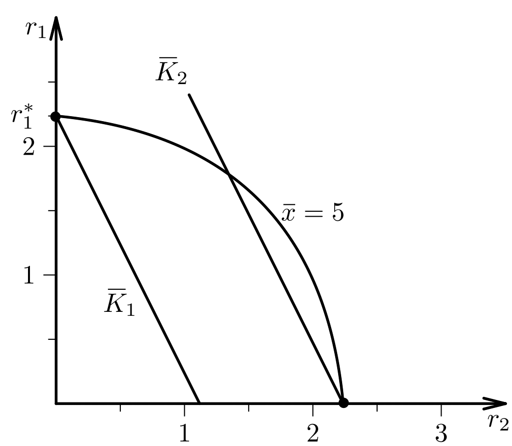

Abbildung 13: Kostenminimum Beispielaufgabe 2.3)

zu 4.) Siehe Abbildung 14.

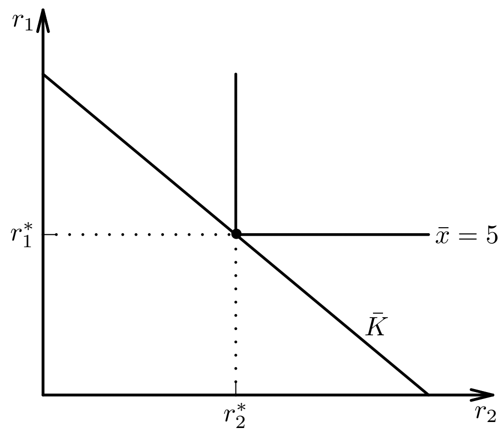

Abbildung 14: Kostenminimum Beispielaufgabe 2.4)

Aufgaben

1. Was sagt die Kostenfunktion aus? Ist jede effiziente Produktionsalternative auch gleichzeitig die kostenminimale? Begründen Sie Ihre Aussage!

2. Erläutern Sie den Unterschied zwischen absolut fixen, sprungfixen und variablen Kosten. Inwiefern ist der Betrachtungszeitraum von Bedeutung?

3. Erklären Sie die Begriffe Gesamtkosten, Fixkosten, variable Kosten, Grenzkosten und Durchschnittskosten! Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den einzelnen Kostenarten?

4. Gegeben sei folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = 2 \cdot x^2 + 1,5 \cdot x + 10$$

a) Zeichnen Sie die Kostenfunktion!
b) Leiten Sie graphisch daraus die Funktion der variablen und der fixen Durchschnittskosten ab!
c) Leiten Sie graphisch die Grenzkostenfunktion ab!
d) Leiten Sie nun die Funktion der variablen Durchschnittskosten und die Grenzkostenfunktion algebraisch her!

5. Ein Produkt wird aus zwei Faktoren gefertigt. Eine Einheit des Faktors 1 kostet 3 GE, eine Einheit des Faktors 2 kostet 4 GE.
a) Stellen Sie die Funktion der Kostenisoquante auf!
b) Zeichnen Sie die Kostenisoquante für K=20!

6. Gegeben sei folgende Grenzkostenfunktion:

$$K'(x) = 0,5 \cdot x + 3$$

Leiten Sie die Funktion der variablen Durchschnittskosten ab. Was kann über den Zusammenhang zwischen variablen Kosten und Grenzkosten hier gesagt werden?

7. Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion

$$K(x) = \frac{10}{3}x^3 - 2x^2 + 20.$$

Berechnen Sie hierfür die Produktionsmengen, für die
a) die Grenzkosten minimal sind und
b) die variablen Durchschnittskosten minimal sind.

8. Gegeben sei die Kostenfunktion

$$K = 2x^3 - x^2 + 3900.$$

Bestimmen Sie jeweils die Produktionsmenge x, bei der die
a) variablen Kosten,
b) Grenzkosten und
c) variablen Durchschnittskosten minimal sind.

9. Gegeben sei die Kostenfunktion

$$K(x) = 4x^3 - x^2 + 25.$$

Geben Sie für $x = 10$ die Höhe
a) der variablen Stückkosten,
b) der Grenzkosten und
c) der durchschnittlichen Fixkosten an.
d) Berechnen Sie die Minima von Grenz- und variablen Kosten.

2 Substitutionale Ein-Produkt-Produktionsfunktionen

In diesem Kapitel sollen Typen von Produktionsfunktionen beschrieben werden, bei denen ein Produkt mit mehreren Faktoren produziert wird und die Einsatzfaktoren untereinander zumindest teilweise austauschbar sind. Unter dem Aspekt der empirischen Relevanz hat vor allem die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion große Bedeutung.

2.1 Das Ertragsgesetz

Das klassische Ertragsgesetz wurde von Turgot bereits im 18. Jahrhundert formuliert. Er untersuchte, wie sich der Ertrag verändert, wenn man bei konstanten Einsatzmengen der Faktoren Saatgut und Boden die Einsatzmenge des Faktors Arbeit variierte. In der modernen Produktionsökonomie hat man erkannt, dass das klassische Ertragsgesetz große Mängel aufweist, was dazu geführt hat, dass v.a. bei empirischen Schätzungen andere Produktionsfunktionen zugrunde gelegt werden. Trotz diverser Mängel, welche weiter unten noch detailierter besprochen werden, soll das Ertragsgesetz hier vorgestellt werden, da es die erste Produktionsfunktion darstellt, welche je empirisch geschätzt worden ist. Zudem stellt das klassische Ertragsgesetz den Beginn der Produktionstheorie dar.

2.1.1 Theoretische Analyse des Ertragsgesetzes

Es soll nun der Verlauf einer klassischen Produktionsfunktion besprochen werden. Dafür werden die produktionstheoretischen Begriffe, wie sie oben eingeführt worden sind, verwendet. Um die Analyse möglichst einfach zu halten, wird eine Produktionsfunktion betrachtet, bei der mit Hilfe von zwei Faktoren ein Produkt hergestellt wird.

Das Ertragsgebirge

Das Ertragsgebirge zeigt den Zusammenhang zwischen Einsatzmengen und Ausbringungsmenge. Da zwei Einsatzfaktoren und ein Produkt betrachtet werden, benötigt man für die Darstellung drei Dimensionen. In Abbildung 15 ist ein Ertragsgebirge einer klassischen Produktionsfunktion abgebildet.

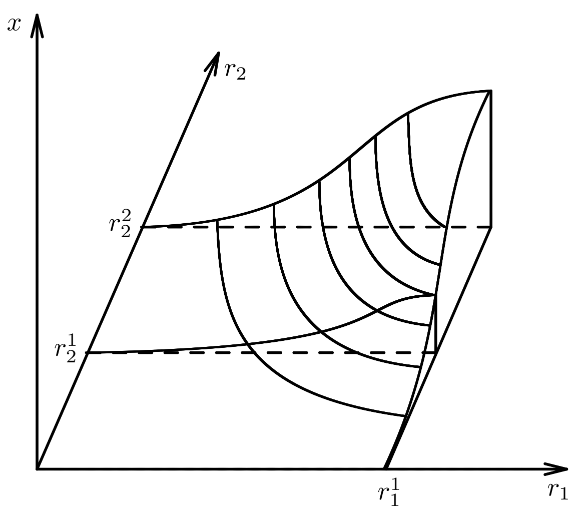

Abbildung 15: Ertragsgebirge

Schneidet man das Ertragsgebirge parallel zur $r_1 r_2$ Ebene, so erhält man die zu der Ausbringungsmenge gehörende Isoquante. Die Isoquanten einer klassischen Produktionsfunktion sind in Abbildung 16 dargestellt.

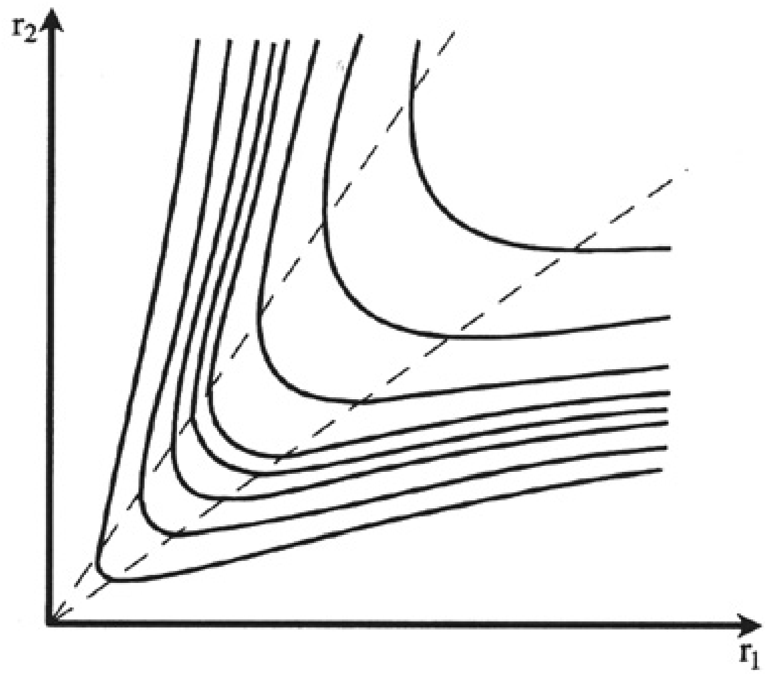

Abbildung 16: Isoquanten einer klassischen Produktionsfunktion

Die Produktionsfunktion Variiert man die Einsatzmenge von nur einem Faktor, so erhält man die Produktionsfunktion. Graphisch erhält man sie, indem man einen Schnitt durch das Ertragsgebirge parallel zu einer xr_i Ebene macht. In Abbildung 17 ist eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion und die zugehörige Grenzertrags- und Durchschnittsertragsfunktion abgebildet.

Partialanalyse

Der Durchschnittsertrag kann auch als Tangens des Winkels des Fahrstrahls abgelesen werden und der Grenzertrag als Tangens des Winkels der Tangente an der Gesamtertragsfunktion.

Die klassische Produktionsfunktion kann in vier Bereiche untergliedert werden. Im ersten Bereich steigt bei einer Erhöhung der Einsatzmenge des Faktors r_i der Ertrag überproportional an. Die Steigung der Gesamtertragskurve nimmt zu, die Grenzertragsfunktion steigt.

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} > 0$$

Im Punkt A ist die maximale Steigung erreicht. In diesem Punkt ist der Gren-

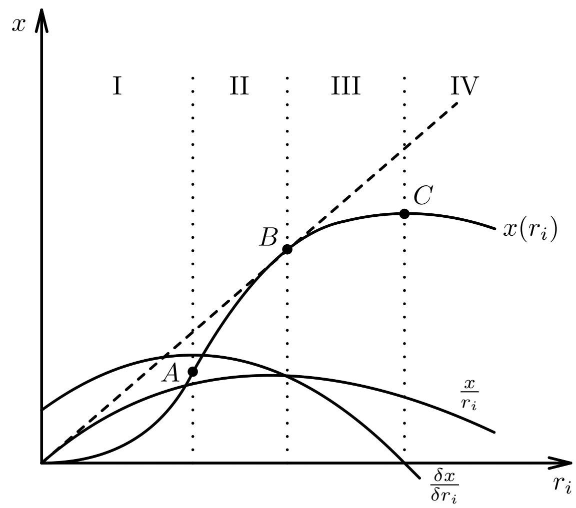

Abbildung 17: Ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

zertrag maximal.

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} = 0$$

Die Produktionselastizität entspricht dem Quotienten aus Grenzproduktivität und Durchschnittsproduktivität. Da im ersten Bereich die Grenzproduktivität oberhalb der Durchschnittproduktivität verläuft, ist die Produktionselastizität größer 1. Man sagt auch der Faktor r_i wird suboptimal eingesetzt, da mit einer Erhöhung der Einsatzmenge seine Produktivität noch gesteigert werden kann.

Im Bereich II steigt die Gesamtertragsfunktion unterproportional. Im Punkt B hat die Durchschnittsertragsfunktion ihr Maximum. Der Fahrstrahl tangiert hier die Gesamtertragsfunktion. Ebenfalls schneiden sich hier Durchschnitts- und Grenzertragsfunktion.

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} < 0; \quad \frac{\partial x}{\partial r_i} = \frac{x}{r_i}$$

Graphisch ist dies einleuchtend, da der Fahrstrahl hier zur Tangente wird. Ökonomisch kann der Schnittpunkt folgendermaßen erklärt werden. Solange die Grenzertragsfunktion oberhalb der Durchschnittsertragsfunktion verläuft, muss die Durchschnittsertragsfunktion steigen, da der mit jeder zusätzlich eingesetzten Einheit des Faktors r_i erzielte zusätzliche Ertrag größer ist als der Durchschnittsertrag. Verläuft die Grenzertragsfunktion unterhalb der Durchschnittsertragsfunktion, so muss der Durchschnittsertrag abnehmen, da der mit jeder zusätzlich eingesetzten Einheit des Faktors r_i zusätzlich erzielte Ertrag geringer als der Durchschnittsertrag ist. Folglich muss die Grenzertragsfunktion die Durchschnittsertragsfunktion in ihrem Maximum schneiden. Auch formal kann dies einfach gezeigt werden. In Punkt B gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} = \frac{x}{r_i}.$$

Im Maximum der Durchschnittsertragsfunktion muss gelten:

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{r_i}\right)}{\partial r_i} = \frac{r_i \cdot \frac{\partial x}{\partial r_i} - 1 \cdot x}{r_i^2} = 0.$$

Formt man diesen Term um, so erhält man schließlich als Bedingung für ein Maximum

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} = \frac{x}{r_i}. \tag{25}$$

Wie man sieht, stimmt diese mit der Bedingung für den Schnittpunkt überein. Die Produktionselastizität ist bis zum Punkt B weiterhin größer 1. Im Punkt B nimmt sie genau den Wert 1 an. Erhöht man in diesem Punkt die Einsatzmenge des Faktors r_i um 1%, so erhöht sich die Ausbringungsmenge um ebenfalls 1%.

Im Bereich III steigt der Gesamtertrag weiter unterproportional an. Der Grenzertrag nimmt weiter ab, bis er im Punkt C null ist. Danach wird er negativ. Der Durchschnittsertrag nimmt ebenfalls ab.

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} < 0; \quad \frac{\partial \left(\frac{x}{r_i}\right)}{\partial r_i} < 0$$

Die Produktionselastizität ist im Bereich III nun kleiner 1. Im Punkt C ist sie null.

Rechts von Punkt C nimmt der Gesamtertrag mit zunehmendem Einsatz von r_i ab:

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} < 0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} < 0; \quad \frac{\partial \left(\frac{x}{r_i}\right)}{\partial r_i} < 0.$$

Dies bedeutet, dass mit zunehmendem Einsatz von Faktor r_i die Ausbringungsmenge sinkt. Dass dies betriebswirtschaftlich nicht sinnvoll ist, ist intuitiv klar und stellt somit einer der größten Kritikpunkte am klassischen Ertragsgesetz dar. Weiter unten wird darauf noch näher eingegangen werden.

Die Kostenfunktion

Die aus dem klassischen Ertragsgesetz resultierende Kostenfunktion lässt sich folgendermaßen herleiten. Die Produktionsfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen der Einsatzmenge eines Faktors r_i und der Ausbringungsmenge x bei Konstanz der Einsatzmengen der anderen Faktoren $\underline{\overline{r}}$.

$$x = (r_i, \underline{\overline{r}}) \tag{26}$$

Ist die Ertragsfunktion nun invertierbar, was bei einer klassischen Produktionsfunktion in den ersten drei Phasen der Fall ist, dann erhält man die Faktoreinsatzfunktion des Faktors r_i

$$r_i = g\left(x, \underline{\overline{r}}\right). \tag{27}$$

Graphisch erhält man sie, indem man die Produktionsfunktion an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt. Bewertet man nun die Faktoreinsatzmenge mit dem Faktorpreis, so erhält man die variable Kostenfunktion in Abhängigkeit von Faktor r_i. Addiert man noch die Fixkosten, so erhält man die Gesamtkostenfunktion einer klassischen Produktionsfunktion. Die Fixkosten resultieren dabei aus den konstanten Einsatzmengen der restlichen Faktoren bewertet mit dem jeweiligen Faktorpreis.[1]

In den Abbildungen 18 und 19 ist graphisch die Herleitung der Kostenfunktion abgebildet.

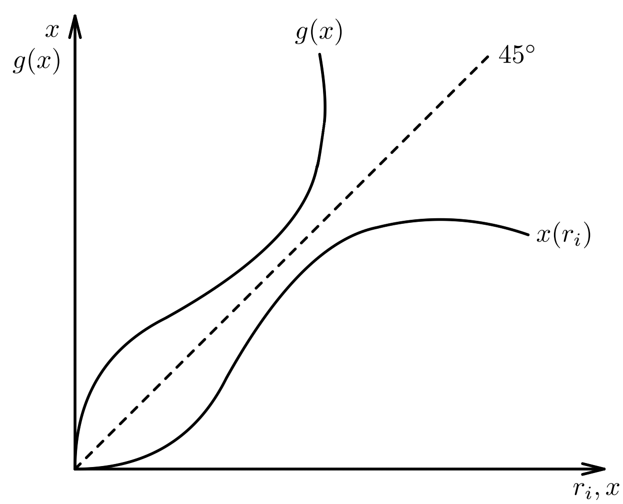

Abbildung 18: Herleitung der zu einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion gehörende Umkehrfunktion

Wie die klassische Produktionsfunktion kann auch die Kostenfunktion in vier Phasen eingeteilt werden. Es soll nun untersucht werden, wie die Durchschnittskosten-, die variable Durchschnittskosten-, die Grenzkostenfunktion und die fixen Kosten pro Stück verlaufen. In Abbildung 20 sind die verschiedenen Funktionen graphische dargestellt.

[1]Strenggenommen stellt eine Kostenfunktion den Zusammenhang zwischen der Ausbringungsmenge und den dafür minimal anfallenden Kosten dar. Dies setzt voraus, dass immer die kostenminimale Faktoreinsatzkombination gewählt wird. Da hier nur die Einsatzmenge eines Faktors variiert wird und die restlichen Einsatzmengen konstant gehalten werden, ist die Bedingung, dass immer die kostenminimale Einsatzkombination gewählt wird, nicht erfüllt. Vielmehr wird hier der Zusammenhang zwischen anfallenden Kosten und Ausbringungsmenge bei Variation der Einsatzmenge eines Faktors dargestellt.

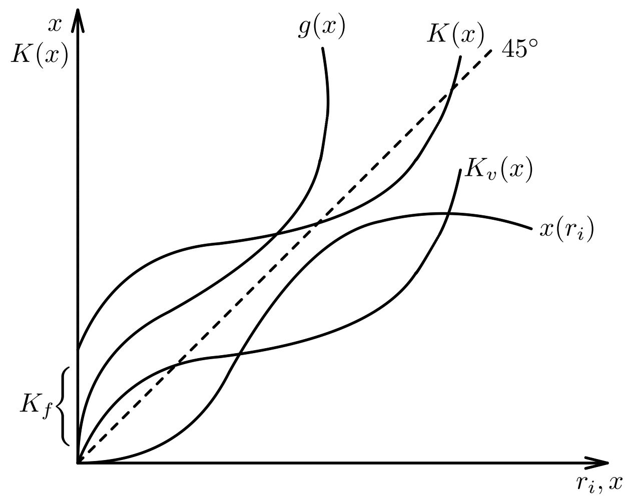

Abbildung 19: Herleitung der zu einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion gehörende Kostenfunktion

Die fixen Kosten pro Stück haben einen inversen Verlauf. Geht die Ausbringungsmenge gegen null, so gehen sie gegen unendlich, geht die Ausbringungsmenge gegen unendlich, so gehen sie gegen null.

In der ersten Phase verläuft die Gesamtkostenfunktion konkav, d.h. die Grenzkosten nehmen ab, bis der Wendepunkt der Gesamtkostenfunktion erreicht ist. Folglich fallen auch die variablen und die gesamten Durchschnittskosten. In der zweiten Phase steigen die Gesamtkosten progressiv an. Die Grenzkosten nehmen zu, die variablen Durchschnittskosten nehmen ab, bis sie in ihrem Minimum die Grenzkostenfunktion schneiden. Diesen Punkt nennt man das *Betriebsminimum*. Die zugehörigen Grenzkosten stellen die kurzfristige Preisuntergrenze dar, für die die Produkte am Markt angeboten werden können. Dabei sind die variablen Kosten gedeckt, jedoch nicht die fixen (der Deckungsbeitrag ist null). Die Funktion der gesamten Durchschnittskosten fällt. In der dritten Phase steigen die Gesamtkosten, die Grenzkosten und die variablen Durchschnittskosten. Nur die gesamten Durchschnittskosten nehmen aufgrund der Fixkostendegression weiter ab. Und zwar solange bis die Zunahme der variablen Stückkosten genau der Abnahme der fixen Durchschnittskosten entspricht. Formal kann dies einfach gezeigt werden. Die Stückkosten setzen sich folgendermaßen zusammen:

$$\frac{K\left(x\right)}{x} = \frac{K_v\left(x\right)}{x} + \frac{K_f\left(x\right)}{x}$$

Das Minimum ist erreicht, wenn

$$\frac{\partial\left(\frac{K(x)}{x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{K_v(x)}{x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{K_f(x)}{x}\right)}{\partial x} = 0$$

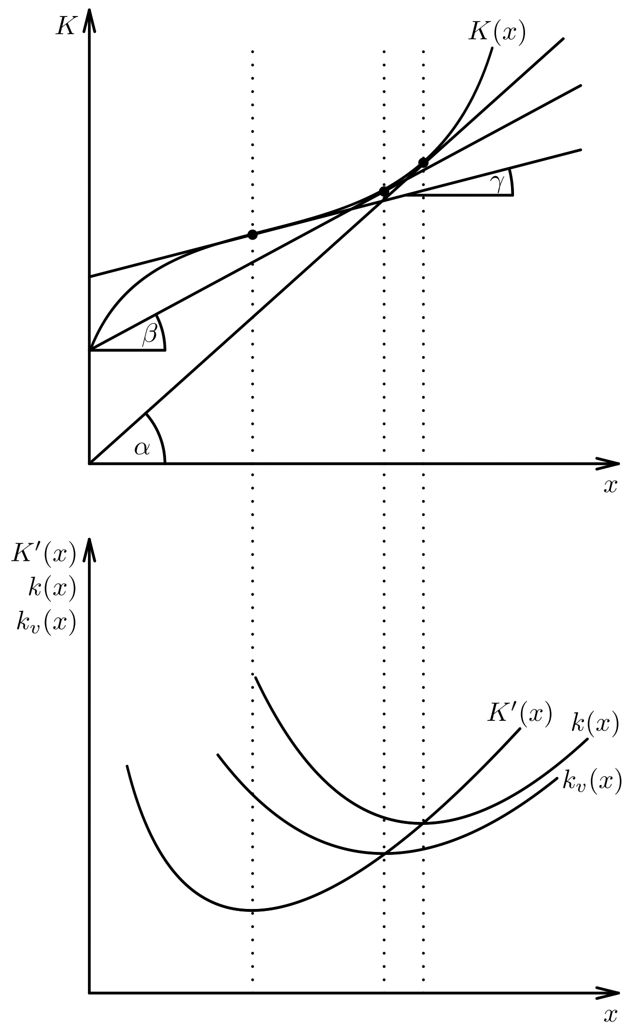

Abbildung 20: Kostenfunktion einer klassischen Produktionsfunktion

oder

$$\frac{\partial\left(\frac{K_v(x)}{x}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{K_f(x)}{x}\right)}{\partial x}.$$

Dort schneiden sich auch die Durchschnitts- und die Grenzkostenfunktion. Auch dies kann einfach formal gezeigt werden. Es soll gelten:

$$\frac{\partial K\left(x\right)}{\partial x} = \frac{K\left(x\right)}{x}$$

und gleichzeitig

$$\frac{\partial\left(\frac{K(x)}{x}\right)}{\partial x}=0$$

Leitet man die Durchschnittskostenfunktion ab und setzt sie null so erhält man:

$$\frac{\partial\left(\frac{K(x)}{x}\right)}{\partial x}=\frac{x\cdot\frac{\partial K}{\partial x}-1\cdot K}{x^2}=0$$

oder

$$x\cdot\frac{\partial K}{\partial x}-1\cdot K=0$$

bzw.

$$\frac{\partial K\left(x\right)}{\partial x}=\frac{K\left(x\right)}{x}. \qquad (28)$$

Diesen Punkt nennt man das Betriebsoptimum. Die zugehörigen Grenzkosten stellen die langfristige Preisuntergrenze dar. Sowohl die fixen als auch die variablen Kosten sind bei diesem Preis gedeckt. In der vierten Phase steigen nun alle Kostenfunktionen wieder an.

2.1.2 Empirische Bedeutung

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, hat Turgot das klassische Ertragsgesetz aus Beobachtungen in der Landwirtschaft abgeleitet. Somit werden durch das Ertragsgesetz produktive Zusammenhänge in der Landwirtschaft beschrieben. Einen Rückschluss auf produktive Zusammenhänge in der industriellen Produktion erlaubt dies jedoch aufgrund der Verschiedenartigkeit des Produktionsprozesses nicht. Während für die Form von Produktionsfunktionen in der Landwirtschaft v. a. biologische Gesetzmäßigkeiten ausschlaggebend sind, werden Produktionsfunktionen in der Industrie v.a. durch physikalische und chemische Gesetzmäßigkeiten und die menschliche Produktivität determiniert. Somit ist auch die empirische Relevanz des Ertragsgesetzes für die industrielle oder Dienstleistungsproduktion sehr gering. Dem Autor ist keine Studie bekannt, welche das Ertragsgesetz für eine industrielle Produktion schätzt.

2.1.3 Beurteilung

Nachdem bereits auf die geringe empirische Relevanz des Ertragsgesetzes eingegangen worden ist, sollen hier noch andere Kritikpunkte erwähnt werden.

In der ersten Phase der Produktionsfunktion wird der Faktor suboptimal eingesetzt. Ein wirtschaftlich orientiertes Unternehmen wird versuchen dies zu vermeiden, indem es die konstanten Faktoren so dimensioniert, dass der betrachtete Faktor nicht ineffizient eingesetzt wird. Können die Einsatzmengen der konstanten Faktoren nicht angepasst werden und ist die Nachfrage so gering, dass die Produktion im suboptimalen Bereich stattfinden müsste, so wird das Unternehmen nur zeitweise im effizienten Bereich produzieren und ansonsten die Anlagen stillstehen lassen. Als Ergebnis erhält man die in Abbildung 21 dargestellte modifizierte Produktionsfunktion.

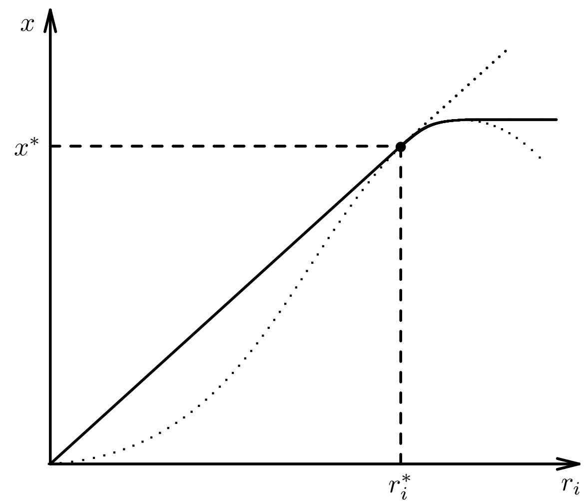

Abbildung 21: Modifizierte ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

Die vierte Phase wird von einem wirtschaftlichen Unternehmen ebenfalls nicht realisiert werden, da die Produktionsfunktion dort nicht mehr effizient ist. Es ist betriebswirtschaftlich nicht sinnvoll die Einsatzmenge eines Faktors zu erhöhen, wenn dies zu einer Verringerung der Ausbringungsmenge führt. Produktionsfunktionen, welche den ersten und den vierten Bereich nicht beinhalten, werden neoklassische Produktionsfunktionen genannt.

2.1.4 Aufgaben

1. Gegeben ist eine klassische Produktionsfunktion.
a) Zeichnen Sie die Produktionsfunktion und kennzeichnen Sie die vier Bereiche.
b) Leiten Sie die Funktion der Durchschnittsproduktivität und der Grenzproduktivität graphisch her.
c) In welchem Punkt schneiden sich Durchschnitts- und Grenzproduktivität?

2. Eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion bei einstufiger Einproduktfertigung und zwei mit variierender Menge einsetzbaren Gütern (1 und 2) lautet:

$$x = -\frac{1}{2000} \cdot r_1^3 \cdot r_2^3 + \frac{1}{25} \cdot r_1^2 \cdot r_2^2$$

a) Berechnen Sie die Kurven partieller Erträge, partieller Durchschnittserträge und partieller Grenzproduktivitäten für $r_1$bei konstanter Einsatzmenge $r_2 = 10$.
b) Die Preise der beiden Einsatzgüter betragen $q_1 = 15$ für Einsatzgut 1 und $q_2 = 10$ für Einsatzgut 2. Berechnen Sie die Minimalkostenkombination.

3. Leiten Sie graphisch die zu einer klassischen Produktionsfunktion gehörende

Kostenfunktion bei Variation eines Faktors her. Zeigen Sie, wie sich die Kostenfunktion verändert, wenn sich der Preis des variablen Faktors erhöht.

4. Gegeben ist folgende, zu einer klassischen Produktionsfunktion gehörende, Kostenfunktion:

$$K\left(x\right) = 0.3x^3 - 8x^2 + 75x + 500$$

a) Leiten Sie die Grenzkosten-, gesamte, variable und fixe Durchschnittskostenfunktion her.
b) Zeigen Sie welche Zusammenhänge zwischen den in a) ermittelten Funktionen besteht. Bestimmen Sie das Betriebsminimum.

2.2 Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist die bekannteste Vertreterin der neoklassischen Produktionsfunktionen. Sie wurde 1928 von Cobb und Douglas formuliert. Neoklassische Produktionsfunktionen sind durch durchweg positive und abnehmende Grenzerträge gekennzeichnet. Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion hat dabei wegen ihrer empirischen Validität und mathematischen Einfachkeit besondere Bedeutung erlangt. Die meisten betriebswirtschaftlichen und volkswirtschaftlichen Schätzungen von Produktionsfunktionen legen zumindest teilweise eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion zugrunde.

2.2.1 Theoretische Analyse der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Die allgmeine Form einer Cobb-Douglas-Funktion sieht folgendermaßen aus:

$$x = \alpha_0 r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot r_I^{\alpha_I} = \alpha_0 \prod_{i=1}^{I} r_i^{\alpha_i} \tag{29}$$

mit:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_I \geq 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i \leq 1$$

Wie man an der Produktionsfunktion erkennen kann, sind die einzelnen Produktionsfaktoren nur peripher substituierbar. Wird ein Faktor nicht eingesetzt, so wird kein Output erzielt. Die Einsatzmengen der verschiedenen Faktoren sind multiplikativ verknüpft.

Das Ertragsgebirge

Zur Darstellung des Ertragsgebirges einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion können wieder nur zwei Einsatzfaktoren berücksichtigt werden. Die Produktionsfunktion hat dann folgende Form:

$$x = \alpha_0 r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}$$

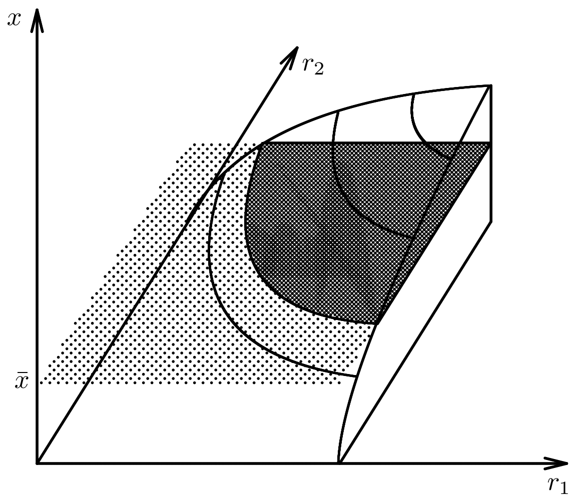

Abbildung 22: Schnitt durch das Ertragsgebirge

Das Ertragsgebirge ist in Abbildung 22 graphisch dargestellt.

Bei einem Schnitt durch das Ertragsgebirge parallel zur $r_1 r_2$ Ebene erhält man die zu der Ausbringungsmenge gehörende Ertragsisoquante (siehe Abbildung 23)

Auch hier wird die nur periphere Substituierbarkeit deutlich, da die Isoquante sich zwar den Achsen annähert, sie jedoch nie berührt. Je weniger von einem Faktor eingesetzt wird, desto schwieriger ist es ihn zu substituieren.

Produktionsfunktion
Die Produktionsfunktion erhält man, indem man einen Schnitt durch das Ertragsgebirge parallel zu einer xr_i Ebene macht. Möchte man z.B. die Produktionsfunktion in Abhängigkeit von Faktor r_1 abbilden, so muss man das Ertragsgebirge parallel zur xr_1 Ebene schneiden. Die resultierende Produktionsfunktion ist in Abbildung 24 dargestellt.

Partialanalyse
Da man bei der Partialanalyse nur die Einsatzmenge r_i des Faktors i variiert und die Einsatzmengen $r_{\hat{\imath}} = \overline{r}_{\hat{\imath}}$ der anderen Faktoren $\hat{\imath}, \hat{\imath} = 1, ...I, \hat{\imath} \neq i$ konstant hält, kann man mit

$$c = \alpha_0 \cdot \overline{r}_1^{\alpha_1} \cdot .... \cdot \overline{r}_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \cdot \overline{r}_{i+1}^{\alpha_{i+1}} .... \cdot \overline{r}_I^{\alpha_I}$$

die Ertragsfunktion vereinfacht in folgender Form schreiben:

$$x = c \cdot r_i^{\alpha_i}$$

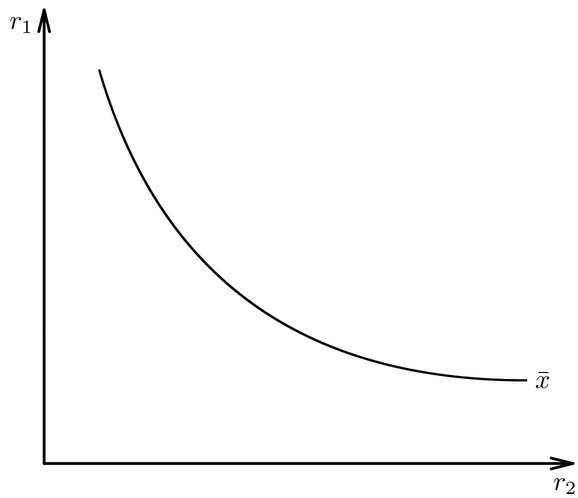

Abbildung 23: Isoquante einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Nach dieser Vereinfachung ist die Partialanalyse recht einfach. Die Grenzproduktivität beträgt:

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} = c \cdot \alpha_i \cdot r_i^{\alpha_i - 1} = \frac{\alpha_i \cdot x}{r_i} > 0. \tag{30}$$

Das bedeutet, dass im ganzen Bereich der Output mit zunehmendem Einsatz eines Faktors steigt. Der vierte Bereich der klassischen Produktionsfunktion

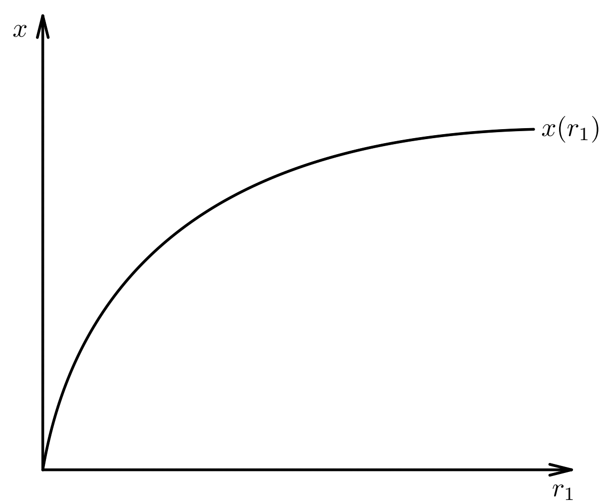

Abbildung 24: Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

entfällt somit. Die zweite Ableitung ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} = c \cdot \alpha_i \cdot (\alpha_i - 1) \cdot r_i^{\alpha_i - 2} < 0. \tag{31}$$

Man sieht, dass die Grenzerträge einer Cobb-Douglas-Funktion monoton abnehmend sind. Dies bedeutet, dass der erste Bereich der klassischen Produktionsfunktion entfällt. Es gibt keinen Bereich mehr, in welchem die Grenzerträge zunehmen.

Die Durchschnittsproduktivität beträgt

$$\frac{x}{r_i} = \frac{c \cdot r_i^{\alpha_i}}{r_i} = c \cdot r_i^{\alpha_i - 1}. \tag{32}$$

Leitet man die Funktion der Durchschnittsproduktivität nach r_i ab, so erhält man

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{r_i} \right)}{\partial r_i} = c \cdot (\alpha_i - 1) \cdot r_i^{\alpha_i - 2} < 0. \tag{33}$$

Die Durchschnittsproduktivität nimmt mit zunehmendem Faktoreinsatz ab.

Vergleicht man die Funktion der Grenzproduktivität mit der der Durchschnittsproduktivität, so sieht man, dass man die Grenzproduktivität erhält, indem man die Durchschnittsproduktivität mit α_i multipliziert.

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} = \alpha_i \cdot \frac{x}{r_i} \tag{34}$$

Da $0 \leq \alpha_i < 1$ und α_i konstant ist, ist die Grenzproduktivität proportional zur Durchschnittsproduktivität und immer kleiner als diese. Betrachtet man das Verhalten der beiden Funktionen für große Einsatzmengen r_i, so sieht man, dass beide Funktionen gegen null streben.

Die Produktionselastizität wurde bereits oben definiert. Bei einer Cobb-Douglas-Funktion hat sie den Wert

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot \frac{r_i}{x} = \alpha_i \cdot \frac{x}{r_i} \cdot \frac{r_i}{x} = \alpha_i = const. \tag{35}$$

Sie nimmt also unabhängig von der Einsatzmenge stets den gleichen Wert α_i und somit einen Wert zwischen null und eins an.

Totalanalyse

Als erstes soll untersucht werden, ob es sich bei einer Cobb-Douglas-Funktion um eine homogene Produktionsfunktion handelt.

In der Ausgangssituation wird

$$x^0 = \alpha_0 \left(r_1^0\right)^{\alpha_1} \cdot \left(r_2^0\right)^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot \left(r_I^0\right)^{\alpha_I}$$

produziert. Nun werden die Einsatzmengen aller Faktoren mit λ multipliziert.

$$x^1 = \alpha_0 \left(\lambda \cdot r_1^0\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\lambda \cdot r_2^0\right)^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot \left(\lambda \cdot r_I^0\right)^{\alpha_I}$$

Man kann λ ausklammern und erhält als Ergebnis

$$x^1 = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_I} \cdot \alpha_0 \left(r_1^0\right)^{\alpha_1} \cdot \left(r_2^0\right)^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot \left(r_I^0\right)^{\alpha_I} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_I} \cdot x^0$$

Eine Cobb-Douglas-Funktion ist homogen vom Grade $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{I.}$ Da für eine Cobb-Douglas-Funktion gilt

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i \leq 1,$$

ist sie immer unterlinearhomogen oder in dem Fall, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1,$$

linearhomogen.

Wie oben bereits gezeigt wurde, stimmen bei homogenen Produktionsfunktionen Homogenitätsgrad und Skalenelastizität überein. Somit liegt die Skalenelastizität von Cobb-Douglas-Funktionen zwischen null und eins.

Als letztes soll noch die Faktoreinsatzfunktion einer Cobb-Douglas-Funktion ermittelt werden. Dafür muss die Produktionsfunktion nach einem Faktor r_i aufgelöst werden. Man erhält dann

$$r_i = \sqrt[\alpha_i]{\frac{x}{\alpha_0 r_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot r_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \cdot r_{i+1}^{\alpha_{i+1}} ..... \cdot r_I^{\alpha_I}}}. \tag{36}$$

Setzt man die Ausbringungsmenge $x = \overline{x}$ konstant, so erhält man die Isoquantengleichung. Leitet man diese nach einem Faktor r_j, $j \neq i$ ab, so erhält man die Grenzrate der Substitution. Die Berechnung vereinfacht sich bedeutend, wenn man sich folgender mathematischer Eigenschaft bedient:

$$-\frac{dr_i}{dr_j} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}}{\frac{\partial x}{\partial r_i}}$$

Mit

$$\frac{\partial x}{\partial r_j} = \alpha_j \frac{x}{r_j}; \quad \frac{\partial x}{\partial r_i} = \alpha_i \frac{x}{r_i}$$

erhält man

$$\frac{dr_i}{dr_j} = \frac{\alpha_j \frac{x}{r_j}}{\alpha_i \frac{x}{r_i}} = \frac{\alpha_j r_i}{\alpha_i r_j} \tag{37}$$

Man sieht, dass die Grenzrate der Substitution proportional zum Faktoreinsatzverhältnis ist. Graphisch bedeutet dies, dass entlang eines Fahrstrahls die Steigung der Isoquanten konstant ist.

2.2.2 Kostenfunktion

Wie schon weiter oben erläutert wurde, drückt die Kostenfunktion den Zusammenhang zwischen der Ausbringungsmenge und den Kosten, die mindestens dabei anfallen aus. Allgemein kann man sie in folgender Form schreiben:

$$K(x) = q_1 \cdot r_1^*(x) + q_2 \cdot r_2^*(x) + ... + q_I \cdot r_I^*(x)$$

Wobei $r_i^*(x),\ i = 1, ...I$ die Einsatzmengen sind, die bei gegebener Ausbringungsmenge die minimalen Kosten erzeugen.

Formal erhält man die optimale Faktoreinsatzkombination für die Ausbringungsmenge x über den Lagrange-Ansatz

$$L = q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2 + ... + q_I \cdot r_I - \lambda \cdot (x(r_1, ...r_I) - x). \tag{38}$$

Die Optimalitätsbedingungen erhält man durch Ableiten der Lagrange-Funktion nach r_i, $i = 1, ..., I$ und λ. Als Ergebnis erhält man:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}}{\frac{\partial x}{\partial r_i}} = \frac{q_j}{q_i};\ \ i, j = 1, ..., I \text{ und } i \neq j \tag{39}$$

Dies bedeutet, dass im Optimum das Verhältnis der Grenzproduktivitäten zweier Einsatzfaktoren ihrem Faktorpreisverhältnis entsprechen muss. Formt man die Bedingung des Kostenoptimums um, so erhält man folgende Bedingung:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}}{q_i} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}}{q_j}, i, j = 1, ...I \text{ und } i \neq j \tag{40}$$

Man sieht, dass im Optimum bei jedem Faktor eine zusätzlich eingesetzte Geldeinheit zu derselben Erhöhung der Ausbringungsmenge führen muss. Um die Optimalitätsbedingung auch graphisch zeigen zu können, sollen von nun an nur noch zwei Einsatzfaktoren betrachtet werden. Im Optimum gilt dann

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial r_1}}{\frac{\partial x}{\partial r_2}} = \frac{q_1}{q_2}. \tag{41}$$

Eine Isoquante ist definiert als der geometrische Ort aller Faktoreinsatzkombinationen, welche die gleiche Ausbringungsmenge erzeugen. Auf einer Isoquante gilt also:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot dr_1 + \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot dr_2 = 0 \tag{42}$$

oder

$$\frac{dr_1}{dr_2} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial r_2}}{\frac{\partial x}{\partial r_1}}. \tag{43}$$

Dies ist die Steigung der Isoquante. Die Isokostengerade ist der geometrische Ort aller Faktoreinsatzkombinationen, die die gleichen Kosten erzeugen. Formal geschrieben bei zwei Faktoren:

$$r_1 = \frac{\overline{K}}{q_1} - \frac{q_2}{q_1} \cdot r_2 \tag{44}$$

mit der Steigung

$$\frac{dr_1}{dr_2} = -\frac{q_2}{q_1} \tag{45}$$

Aus den Gleichungen sieht man, dass im Kostenminimum die Isokostengerade die Isoquante tangiert.

Allerdings gilt dies nur bei konvexem Verlauf der Isoquante.

$$\frac{d^2 r_1}{dr_2^2} > 0$$

Verläuft sie linear, so ist obige Optimalitätsbedingung nur in dem Fall erfüllt, dass die Isokostenlinie die gleiche Steigung wie die Isoquante hat. Ansonsten ist eine Randlösung optimal.

Mit diesem Wissen soll nun die Kostenfunktion für eine Cobb-Douglas-Funktion bei zwei Einsatzfaktoren ermittelt werden.

$$x = r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2}, \text{ mit } \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

(Dies soll als Vereinfachung angenommen werden.)

$$K = q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2$$

Im Kostenoptimum muss gelten:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial r_1}}{\frac{\partial x}{\partial r_2}} = \frac{q_1}{q_2}$$

bzw. hier

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 \cdot \frac{x}{r_1}}{\alpha_2 \cdot \frac{x}{r_2}} &= \frac{q_1}{q_2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha_1 \cdot r_2}{\alpha_2 \cdot r_1} &= \frac{q_1}{q_2} \end{aligned}$$

Löst man die Optimalitätsbedingung nach r_1 und r_2 auf, so erhält man

$$r_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot r_2 \text{ bzw. } r_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1$$

Setzt man diese Relationen in die Produktionsfunktion ein,

$$x = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot r_2\right)^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2} \text{ bzw. } x = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1\right)^{\alpha_2} \cdot r_1^{\alpha_1}$$

so erhält man nach einigen Umformungen für r_2

$$r_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}\right)^{\alpha_1} \cdot x$$

und analog für r_1

$$r_1 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1}\right)^{\alpha_2} \cdot x.$$

Setzt man diese Gleichungen in die Kostenfunktion ein, so erhält man

$$K = q_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1}\right)^{\alpha_2} \cdot x + q_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}\right)^{\alpha_1} \cdot x$$

oder

$$K = \left[q_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1}\right)^{\alpha_2} + q_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}\right)^{\alpha_1}\right] \cdot x. \tag{46}$$

Somit hat man die zugehörige Kostenfunktion ermittelt. Da der Klammerausdruck konstant ist, verläuft die Kostenfunktion der linearhomogenen Produktionsfunktion linear mit der Steigung des Klammerausdrucks. Die Steigung wird sowohl von den Faktorpreisen als auch den Produktionskoeffizienten bestimmt. Die Grenzkosten und die Durchschnittskosten sind hier identisch und nehmen den Wert des Klammerausdrucks an.

2.2.3 Anhang: Allgemeine Kostenfunktion einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Hier soll kurz die allgemeine Kostenfunktion einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion hergeleitet werden. Im Fall von zwei Einsatzfaktoren, sieht die Produktionsfunktion wie folgt aus:

$$x = \alpha_0 r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}$$

Stellt man die Bedingung für ein Kostenminimum auf und löst diese nach r_1 und r_2 auf, so erhält man wie oben:

$$r_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot r_2 \text{ bzw. } r_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1$$

Setzt man diese Relationen in die Produktionsfunktion ein

$$x = \alpha_0 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot r_2\right)^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2} \text{ bzw. } x = \alpha_0 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1\right)^{\alpha_2} \cdot r_1^{\alpha_1},$$

so erhält man nach einigen Umformungen für r_1

$$r_1 = \left(\frac{x}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

und analog für r_2

$$r_2 = \left(\frac{x}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Setzt man diese Gleichungen in die Kostenfunktion ein, so erhält man

$$K(x) = q_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + q_2 \cdot \left(\frac{x}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

oder

$$K(x) = \left\{\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot \left[q_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + q_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\right]\right\} \cdot x^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

Man sieht, dass im Fall, dass die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion unterlinear homogen ist ($\alpha_1 + \alpha_2 < 1$) die zugehörige Kostenfunktion durch steigende Grenzkosten gekennzeichnet ist (2. Ableitung ist größer 0). Im Fall, dass die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion linear homogen ist ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$), ist die zugehörige Kostenfunktion durch konstante Grenzkosten gekennzeichnet (2. Ableitung ist 0).

2.2.4 Beispiele und Aufgaben

Beispiel 1:

Gegeben ist folgende Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$x = 2r_1^{0,4} r_2^{0,6}$$

Es soll nun die Grenzproduktivität, die Durchschnittsproduktivität und die Produktionselastizität des 1. Faktors berechnet werden:

Grenzproduktivität:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r_1} &= 2 \cdot 0,4 r_1^{-0,6} r_2^{0,6} = 0,8 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0,6} \\ &= 0,4 \cdot \frac{2 \cdot r_2^{0,6}}{r_1^{0,6}} \cdot \frac{r_1^{0,4}}{r_1^{0,4}} = 0,4 \cdot \frac{x}{r_1}\end{aligned}$$

Durchschnittsproduktivität:

$$\frac{x}{r_1} = \frac{2 \cdot r_1^{0,4} r_2^{0,6}}{r_1} = 2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0,6}$$

Produktionselastizität:

$$\frac{\frac{\partial x}{x}}{\frac{\partial r_1}{r_1}} = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot \frac{r_1}{x} = 0,4 \cdot \frac{x}{r_1} \cdot \frac{r_1}{x} = 0,4$$

Beispiel 2:

Gegeben ist folgende Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$x = 50 \cdot r_1^{0,5} r_2^{0,2} r_3^{0,1}$$

Es soll überprüft werden, ob die Funktion homogen ist. Weiter soll die Skalenelastizität berechnet werden.

Überprüfung der Homogenität:

$$\begin{aligned} x \cdot \lambda^t &= 50 \cdot (\lambda r_1)^{0,5} (\lambda r_2)^{0,2} (\lambda r_3)^{0,1} \\ &= 50 \cdot \lambda^{0,5} \cdot \lambda^{0,2} \cdot \lambda^{0,1} r_1^{0,5} r_2^{0,2} r_3^{0,1} \\ x \cdot \lambda^t &= \lambda^{0,8} \cdot 50 r_1^{0,5} r_2^{0,2} r_3^{0,1} \end{aligned}$$

Man sieht, dass λ ausgeklammert werden kann. Die Funktion ist also homogen.

Skalenelastizität:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial x}{x}}{\frac{\partial \lambda}{\lambda}} &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{x} = 0,8 \cdot \lambda^{-0,2} \cdot 50 r_1^{0,5} r_2^{0,2} r_3^{0,1} \cdot \frac{\lambda}{50 \lambda^{0,8} \cdot r_1^{0,5} r_2^{0,2} r_3^{0,1}} \\ &= 0,8 \cdot \frac{\lambda^{-0,2} \cdot \lambda}{\lambda^{0,8}} = 0,8 \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Skalenelastizität einer homogenen Funktion der Hochzahl von λ entspricht.

Beispiel 3:

Gegeben ist folgende Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$x = r_1^{0,5} r_2^{0,5}$$

Die Faktorpreise betragen 3 und 5 für die Faktoren 1 und 2. Berechnen sie die Minimalkostenkombination für $x = 5$ und die Kostenfunktion.

Minimalkostenkombination für $x = 5$:

$$\begin{aligned} s_{12} &= \frac{q_2}{q_1} \quad mit \\ s_{12} &= -\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_2}}{\frac{\partial x}{\partial r_1}}; \\ \frac{\partial x}{\partial r_1} &= 0,5 r_1^{-0,5} r_2^{0,5} = 0,5 \frac{x}{r_1}; \quad \frac{\partial x}{\partial r_2} = 0,5 r_1^{0,5} r_2^{-0,5} = 0,5 \frac{x}{r_2} \\ \frac{0,5 \frac{x}{r_2}}{0,5 \frac{x}{r_1}} &= \frac{5}{3} \Longleftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{5}{3} r_2 \\ 5 &= \left(\frac{5}{3} r_2\right)^{0,5} \cdot r_2^{0,5} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{0,5} \\ r_2 &= 3,872983346; \quad r_1 = \frac{5}{3} r_2 = 6,454972244 \\ K &= 6.454972244 \cdot 3 + 3.872983346 \cdot 5 = 38,7298335 \end{aligned}$$

Kostenfunktion:

Man nutzt folgende Beziehung, welche aus der Minimalkostenkombination resultiert (s.o.) aus:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{5}{3}r_2; \quad r_2 = \frac{3}{5}r_1 \quad \text{jeweils eingesetzt in die Produktionsfunktion:} \\
x &= \left(\frac{5}{3}r_2\right)^{0,5} r_2^{0,5} = \left(\frac{5}{3}\right)^{0,5} r_2 \;\Rightarrow\; r_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{0,5} x \\
x &= r_1^{0,5}\left(\frac{3}{5}r_1\right)^{0,5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{0,5} r_1 \;\Rightarrow\; r_1 = \left(\frac{5}{3}\right)^{0,5} x \\
& \quad \text{eingesetzt in die Kostenfunktion} \\
K &= q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2 \\
&= 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{0,5} x + 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{0,5} x = \left[3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{0,5} + 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{0,5}\right] \cdot x \\
K &= 7,746 \cdot x
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Gegeben sei eine Produktionsfunktion der folgenden Form:

$$x = 3 \cdot r_1^{0,3} \cdot r_2^{0,5} \cdot r_3^{0,2}$$

a) Berechnen Sie für alle drei Faktoren die Durchschnittsproduktivität und die partielle Grenzproduktivität! Welchen Zusammenhang können Sie zwischen Durchschnittsproduktivität und Grenzproduktivität erkennen?
b) Untersuchen Sie, ob zunehmende, konstante oder abnehmende Grenzerträge vorliegen!
c) Berechnen Sie die Produktionselastizität aller drei Faktoren!
d) Berechnen Sie an dem Produktionspunkt $(x, r_1, r_2, r_3) = (x, 1, 2, 3)$ das partielle Grenzprodukt, wenn die Einsatzmenge des Faktors 1 um eine Einheit erhöht wird.
e) Berechnen Sie an demselben Produktionspunkt das totale Grenzprodukt, wenn die Einsatzmengen aller Faktoren um eine Einheit erhöht werden.
f) Berechnen Sie die Skalenelastizität. Was sagt Sie aus?
g) Berechnen Sie die Grenzdaten der Substitution s_{13} und s_{32}.

2. Gegeben sei eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Form:

$$x = 2r_1^{0,4} \cdot r_2^{0,6}$$

a) Berechnen Sie die Durchschnittsproduktivität und die Grenzproduktivität des Faktors 2 an der Stelle $(x, r_1, r_2) = (x, 2, 4)$!
b) Zeichnen Sie die Isoquante für x = 5!
c) Berechnen Sie die Produktionselastizitäten für beide Faktoren! Was sagen sie aus?

3. Gegeben sei eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Form:

$$x = 50{r_1}^{0,5}{r_2}^{0,3}{r_3}^{0,2}$$

a) Handelt es sich um eine Funktion mit abnehmenden, konstanten oder steigenden Skalenerträgen?
b) Bestimmen Sie die partiellen Grenzproduktivitäten für den Produktionspunkt

$$(x, r_{1,} r_{2,} r_{3)} = (x, 2, 2, 4)$$

c) Zeigen Sie, dass für alle Faktoren das Gesetz abnehmender Grenzerträge gilt.
d) Zeigen Sie, dass alle drei Produktionselastizitäten unabhängig von den Faktoreinsatzmengen sind.

4. Gegeben sei die Produktionsfunktion $x = r_1^{0,3} r_2^{0,8}$. Berechnen und erläutern Sie für $x = 5$ und $r_1 = 1$:
a) die partiellen Grenzproduktivitäten von $r_1$und r_2,
b) das totale Grenzprodukt,
c) die Produktionselastizität ε_1 und
d) den Homogenitätsgrad der Funktion.

5. Gegeben sei die Produktionsfunktion $x = r_1^{0,5} r_2^{0,5}$. Die Faktorpreise sind 3 und 5 für Faktor eins und zwei.
a) Zeichnen Sie die Isoquante für die Ausbringungsmenge $x = 4$.
b) Zeichnen Sie die Kostenisoquante für $K = 15$.
c) Bestimmen Sie graphisch das Kostenminimum für die Ausbringungsmenge $x = 4$. Wieviel wird von Faktor eins und zwei eingesetzt? Wie hoch sind die Kosten?
e) Bestimmen Sie die zu der Produktionsfunktion gehörende Kostenfunktion.

6. Der Preis von r_1 betrage 4 DM pro Einheit, derjenige von r_2 2 DM. Berechnen Sie die Kostenfunktion $K(x)$, die zu der Produktionsfunktion $x = r_1^{0,5} r_2^{0,7}$ gehört.

7. Für die Produktionsfunktion $x = r_1^{0,3} r_2^{0,8}$ sei die Produktionsmenge von 25 gegeben.
a) Die Grenzrate der Substitution s_{12} beträgt in einem Punkt $0,5$. Wie hoch sind die zugehörigen Einsatzmengen r_1 und r_2?
b) Berechnen Sie die Minimalkostenkombination. Der Preis pro Einheit des Faktors r_1 betrage 3, derjenige für r_2 betrage 5.

8. Mit der Produktionsfunktion $x = 4r_1^{0,4} r_2^{0,6}$ sollen 100 Einheiten produziert werden. Der Preis von r_1 beträgt 4 DM pro Einheit und der Preis von r_2 5 DM pro Einheit.
a) Wieviel kostet die Minimalkostenkombination?
b) Wenn der Preis von $r_1$weiterhin 4 DM beträgt, wieviel muss dann r_2 kosten,

damit in der Minimalkostenkombination gerade doppelt so viele Einheiten von r_2 eingesetzt werden wie von r_1? Gehen Sie weiterhin von $x = 100$ aus.

3 Limitationale Produktionsfunktionen

Bei limitationalen Produktionsfunktionen sind die einzelnen Einsatzfaktoren nicht mehr gegeneinander austauschbar. Dies bedeutet, dass zu jeder Ausbringungsmenge nur eine effiziente Kombination von Einsatzfaktoren existiert. In diesem Kapitel werden zwei Arten von limitationalen Produktionsfunktionen erläutert, welche sich sehr stark unterscheiden.

3.1 Leontief-Produktionsfunktion

Die Leontief-Produktionsfunktion ist eine linear-limitationale Produktionsfunktion. Allgemein kann sie bei einstufiger Einproduktproduktion wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{array}{cccc} r_1 & = & a_1 & x \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ r_I & = & a_I & x \end{array}$$

$$\text{bzw. } r_i = a_i x; \quad a_i = const. > 0, \quad i = 1, ..., I \tag{47}$$

Man sieht, dass die Leontief-Produktionsfunktion hier nicht in der Form $x = f(r_1, ..., r_I)$ oder als Ertragsfunktion $r_i = g(x)$ dargestellt wird. Stattdessen verwendet man die Aufwandsfunktionen der Einsatzfaktoren zur Darstellung einer Leontief-Produktionsfunktion. Dies liegt daran, dass jede Ausbringungsmenge nur mit einer Kombination von Einsatzfaktoren effizient hergestellt werden kann. Die Ertragsfunktion würde somit bei Konstanz der restlichen Einsatzfakoren auf einen Punkt schrumpfen. Die Darstellung $x = f(r_1, ..., r_I)$ eignet sich insofern nicht, da der Zusammenhang der Einsatzmengen der verschiedenen Faktoren nicht abgebildet werden kann. Man kann die Produktionsfunktion in folgender Form darstellen:

$$x = \frac{r_i}{a_i} \tag{48}$$

mit

$$\frac{r_i}{a_i} = \frac{r_{\hat{\imath}}}{a_{\hat{\imath}}}$$

für alle $i, \hat{\imath} \in \{1, ...I\}$. Man sieht, dass hier jedoch explizit der Zusammenhang zwischen den Einsatzmengen der einzelnen Faktoren bestimmt wird. Damit ist sichergestellt, dass nur effiziente Kombinationen betrachtet werden.

Möchte man eine limitationale Produktionsfunktion graphisch darstellen, so macht man dies mit Hilfe einer Prozessgeraden. Der Prozessstrahl bildet alle effizienten Faktorkombinationen ab.

Eigenschaften der Produktionsfunktion

Wie bereits am Anfang dieses Kapitels erwähnt wurde, kann eine Leontief-Funktion nicht ohne weiteres in Form einer Produktionsfunktion dargestellt werden. Trotzdem sollen hier verschiedene Eigenschaften einer Leontief-Funktion besprochen werden.

Die Grenzproduktivität eines Faktors ist bei einer Leontief-Produktionsfunktion abhängig von den Einsatzmengen der anderen Faktoren. Werden die Einsatzmengen der anderen Faktoren konstant gehalten, so führt die Erhöhung der Einsatzmenge des betrachteten Faktors zu keiner Erhöhung der Ausbringungsmenge. Somit ist die Grenzproduktivität null. Ist der betrachtete Faktor jedoch der Engpassfaktor, so nimmt die Grenzproduktivität einen positiven Wert an:

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} = \frac{1}{a_i} \tag{49}$$

Man sieht, dass die Grenzproduktivität eines Faktors nun dem Reziprok seines Produktionskoeffizienten entspricht.

Die Durchschnittsproduktivität eines Faktors entspricht ebenfalls dem Kehrwert des Produktionskoeffizienten. Da der Produktionskoeffizient konstant ist, sind auch Grenzproduktivität und Durchschnittsproduktivität konstant:

$$\frac{x}{r_i} = \frac{1}{a_i} \tag{50}$$

Der Grenzaufwand ist der Aufwand, der entsteht, wenn eine zusätzliche Einheit des Produkts produziert wird. Bei Faktor i:

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} = a_i \tag{51}$$

Auch er ist konstant und entspricht dem Produktionskoeffizienten.

Bei einer Leontief-Produktionsfunktion handelt es sich um eine linear-homogene Produktionsfunktion. Dies folgt aus der Eigenschaft der linearen Limitationalität.

Mehrere limitationale Prozesse

Oft kann ein Unternehmen zwischen verschiedenen Produktionsverfahren wählen, wobei jedes der Verfahren durch eine limitationale Produktionsfunktion beschrieben wird. Dann existieren mehrere limitationale Produktionsprozesse. Man unterscheidet dabei, ob die Prozesse mischbar sind oder nicht. Mischbar sind Prozesse, wenn eine bestimmte Ausbringungsmenge mit mehr als einem Prozess erzeugt werden kann. Man kann sich vorstellen, dass einem Unternehmen mehrere Maschinen zur Verfügung stehen, mit denen es ein Produkt herstellen kann. Jede dieser Maschinen spiegelt einen Prozess wider. Kann das Unternehmen nur eine Maschine einsetzen, so sind die Prozesse nicht mischbar. Kann es hingegen den Einsatz der Maschinen z.B. zeitlich derart kombinieren, dass es erst mit einem Verfahren produziert und danach mit einem anderen, so spricht man von mischbaren Prozesse.

Stehen einem Unternehmen Π, $\Pi \in N$ reine Prozesse zur Verfügung, so kann man eine Leontief-Produktionsfunktion in der folgenden Form formulieren.

$$\begin{array}{cccc} r_1^\pi & = & a_1^\pi & x^\pi \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ r_I^\pi & = & a_I^\pi & x^\pi \end{array} \tag{52}$$
$$\pi = 1, ..., \Pi \text{ und } a_i^\pi = const. > 0 \text{ für alle } i = 1, ..., I \text{ und } \pi = 1, ..., \Pi$$

Dabei sind x^πdie Mengen des Endprodukts, die mittels des π-ten Prozesses hergestellt werden, a_i^π sind die dazugehörenden Produktionsfaktoren und r_i^π die benötigten Einsatzmengen des Faktors i.

Stehen einem Unternehmen mehrere Prozesse zur Verfügung, so stellt sich das Problem die effizienten Prozesse zu finden, welche die Produktionsfunktion determinieren. Wie man die Prozesse findet, soll an folgendem Beispiel demonstriert werden. Es existieren drei Prozesse, bei denen jeweils zwei Faktoren eingesetzt werden. Zuerst soll angenommen werden, dass sie nicht mischbar seien. Damit die Prozesse auch graphisch darstellbar sind, werden hier nur zwei Einsatzfaktoren und ein Produkt betrachtet. Die Prozesse werden durch ihre Basisproduktionspunkte dargestellt. Diese geben an, wieviel man von den einzelnen Faktoren benötigt, um eine Einheit des Produktes herzustellen. Da die Prozesse linear-limitational sind, ist durch ein Basispoduktionspunkte ein Prozess vollständig beschrieben.

$$Y^1 \quad : \quad y_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Y^2 : y_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Y^3 : y_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{mit } y_i = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ x \end{pmatrix}$$

Bei Prozess Y^1 benötigt das Unternehmen also 5 Einheiten von Faktor 1 und 3 von Faktor 2, um eine Einheit von x herzustellen. Ob nun alle Prozesse effizient sind, ermittelt man durch paarweisen Vergleich. Dabei genügt es zu überprüfen, ob jeder Prozess inputeffizient ist, da der Output bei allen Prozessen derselbe ist. Wie Inputeffizienz definiert ist, wurde bereits im ersten Kapitel besprochen. Betrachtet man die durch ihre Basisproduktionspunkte dargestellten Prozesse, so sieht man, dass Prozess Y^1 den Prozess Y^3 dominiert. Um eine Einheit zu produzieren, muss bei Prozess Y^1 bei Faktor 1 eine Einheit weniger als bei Prozess Y^3 und gleich viel bei Faktor 2 eingesetzt werden. Das Unternehmen wird also bei seiner Produktionplanung nur die ersten beiden Prozesse berücksichtigen. Die Produktionsfunktion besteht nun aus den Prozessen Y^1 und Y^2.

Sind auch Mischprozesse zugelassen, so ist eine Leontief-Produktionsfunktion durch die obige Darstellungsweise nicht vollständig beschrieben. Es müssen nun

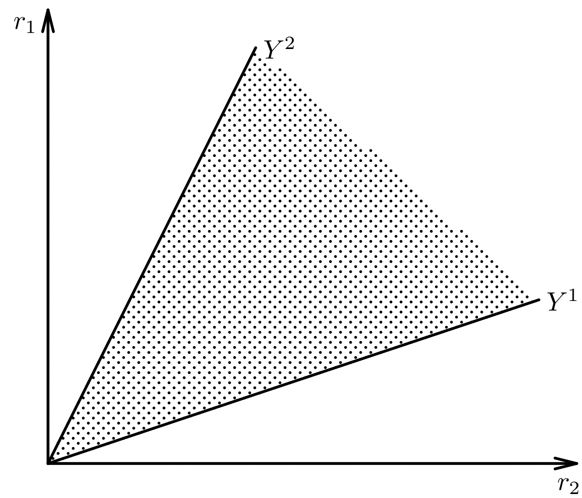

Abbildung 25: Menge der Mischprozesse bei zwei reinen Prozessen

auch die Mischprozesse beschrieben werden. Die Produktionskoeffizienten eines solchen Mischprozesses $\hat{\pi}$ haben dann bei zwei reinen Prozessen folgende Form

$$a_1^{\hat{\pi}} = \lambda a_1^1 + (1 - \lambda)\, a_1^2$$

$$a_2^{\hat{\pi}} = \lambda a_2^1 + (1 - \lambda)\, a_2^2; \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Die Menge aller Mischprozesse bei zwei reinen Prozessen ist in Abbildung 25 dargestellt:

Für $\lambda = 0$ nehmen die Produktionskoeffizienten den Wert der Produktionskoeffizienten des zweiten Prozesses an, für $\lambda = 1$ den des ersten Prozesses. Verallgemeinert auf I Faktoren und Π Prozesse kann man schreiben

$$a_i^{\hat{\pi}} = \sum_{\pi=1}^{\Pi} \lambda_\pi a_i^\pi; \quad 0 \leq \lambda \leq 1,\ \pi = 1, ..., \Pi \tag{53}$$

mit

$$\sum_{\pi=1}^{\Pi} \lambda_\pi = 1; \quad i = 1, ..., I$$

Man muss jedoch immer noch gesondert prüfen, ob die einzelnen Prozesse effizient sind. Gibt es nur zwei reine Prozesse, welche sich nicht gegenseitig dominieren, so sind auch alle Konvexkombinationen effizient. Gibt es jedoch mehr als zwei reine Prozesse, so stimmt diese Aussage nicht mehr. Man muss nun jede mögliche Konvexkombination mit den reinen Prozessen vergleichen, um feststellen zu können, welche Kombinationen effizient sind. Wie die Menge der Mischprozesse aussieht und wie man die effizienten Prozesse bestimmt, wird zum einfacheren Verständnis anhand eines Beispiels demonstriert. Es existieren nun drei reine Prozesse, welche auch gemischt werden können.

$$Y^1 : y_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Y^2 : y_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Y^3 : y_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vergleicht man die Prozesse paarweise, so sieht man, dass kein Prozess einen anderen dominiert. Nun kann aber auch ein gemischter Prozess einen reinen dominieren. Um zu überprüfen, ob ein reiner Prozess durch einen gemischten dominiert wird, muss man bestimmte mögliche Konvexkombinationen der anderen Prozesse mit dem betrachteten vergleichen. Damit man einen gemischten Prozess mit dem reinen vergleichen kann, erzeugt man eine Konvexkombination aus den Produktionspunkten zweier reiner Prozesse, bei der dieselbe Ausbringungsmenge erzeugt wird und bei einem Faktor dieselbe Menge eingesetzt wird. So genügt es, die Einsatzmenge des anderen Faktors bei der Konvexkombination mit der Einsatzmenge bei dem reinen Prozess für dieselbe Ausbringungsmenge zu vergleichen. Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden. Es wird überprüft, ob der Prozess Y^3 durch einen Mischprozess aus Y^1 und Y^2 dominiert wird. Man setzt die Ausbringungsmenge auf 1 und die Einsatzmenge bei Faktor 1 auf 6. Somit müssen nur die Einsatzmengen des Faktors 2 verglichen werden.

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \\
4 \cdot (1-\lambda) + 7 \cdot \lambda &= 6 \\
4 \cdot (1-\lambda) + 2 \cdot \lambda &= a \\
\lambda &= \frac{2}{3} \\
a &= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass man mit Hilfe eines Mischprozesses aus Y^1 und Y^2 günstiger eine Einheit des Gutes herstellen kann. Bei gleicher Menge des Faktors 1 wie bei Y^3 (nämlich 6) genügen $\frac{8}{3} < 3$ Einheiten von Faktor 2, um eine Einheit zu produzieren. Der Prozess Y^3 wird somit durch einen Mischprozess dominiert und ist nicht effizient.

3.1.1 Kostenfunktion

Nun soll die zu einer Leontief-Produktionsfunktion gehörende Kostenfunktion hergeleitet werden. Zuerst soll der Fall betrachtet werden, dass nur ein reiner Prozess vorliegt. Es existiert dann bei gegebener Ausbringungsmenge nur eine effiziente Faktoreinsatzkombination

$$\begin{array}{cccc} r_1 & = & a_1 & x \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ r_I & = & a_I & x \end{array} \qquad i = 1, ..., I$$

Die Kosten ergeben sich nun, indem man die Einsatzfaktoren mit ihren Faktorpreisen bewertet. Die Kostenfunktion hat dann folgende Form

$$K = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i = \sum_{i=1}^{I} q_i a_i x = \left(\sum_{i=1}^{I} q_i a_i \right) x \tag{54}$$

Man sieht, dass die zu einer Leontief-Produktionsfunktion gehörende Kostenfunktion linear verläuft und keinen Fixkostenanteil beinhaltet. Die Steigung ergibt sich aus der Summe der mit den zugehörenden Faktorpreisen gewichteten Produktionskoeffizienten. Die Grenzkosten entsprechen hier den Durchschnittskosten und sind

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{K}{x} = \left(\sum_{i=1}^{I} q_i a_i \right) \tag{55}$$

Graphisch wird die Minimalkostenkombination ermittelt, indem man den Tangentialpunkt von Isoquante und Isokostenlinie sucht. Man sieht, dass dieser immer im Eckpunkt der Isoquante liegt, welches gleichzeitig der einzige effiziente Produktionspunkt ist. Die Minimalkostenkombination ändert sich auch nicht, wenn sich die Faktorpreise ändern.

Gibt es nun Π effiziente reine Produktionsprozesse, so lautet die Kostenfunktion für den Prozess π:

$$K^{\pi}(x) = \left(\sum_{i=1}^{I} q_i a_i^{\pi} \right) x \tag{56}$$

Sind die reinen Prozesse nicht kombinierbar, so wählt man den Prozess π^*für den gilt:

$$K^{\pi^*}(x) = \min_{\pi=1,....\Pi} K^{\pi}(x) \tag{57}$$

Da es sich hier um lineare Kostenfunktionen mit nur variablen Kosten handelt, wählt man den Prozess mit den geringsten Grenz- bzw. Durchschnittskosten. Es ist also ausreichend, wenn man untersucht mit welchem Prozess eine Einheit des Produktes am billigsten hergestellt werden kann.

Sind die reinen Prozesse mischbar und $\hat{\Pi} \leq \Pi$ Prozesse kostenminimal, so sind auch alle unreinen Prozesse, die eine Konvexkombination dieser Prozesse bilden, kostenminimal. Formal kann dies folgendermaßen dargestellt werden.

$$x = \lambda^1 x + ... + \lambda^{\hat{\Pi}} x$$

mit

$$0 \leq \lambda^{\pi} \leq 1, \quad \pi = 1, ..., \hat{\Pi}$$

und

$$\sum_{\pi=1}^{\hat{\Pi}} \lambda^{\pi} = 1$$

$$K(x) = K^{1}\left(\lambda^{1}x\right) + ... + K^{\hat{\Pi}}\left(\lambda^{\hat{\Pi}}x\right)$$

$$\begin{aligned} K(x) &= \left(\sum_{i=1}^{I} q_i a_i^1\right)\left(\lambda^1 x\right) + ... + \left(\sum_{i=1}^{I} q_i a_i^{\hat{\Pi}}\right)\left(\lambda^{\hat{\Pi}} x\right) \\ &= \left[\sum_{\pi=1}^{\hat{\Pi}} \sum_{i=1}^{I} \left(q_i a_i^{\pi} \lambda^{\pi}\right)\right] x \end{aligned} \tag{58}$$

Man sieht wieder, dass auch die Kostenfunktion einer Konvexkombination linear verläuft und keine Fixkosten beinhaltet.

Sind alle Faktoren unbegrenzt vorhanden, so wählt man den Prozess mit den geringsten Kosten. Wenn es mehrere kostenminimale Prozesse gibt, so kann man auch eine Konvexkombination wählen. Sind jedoch bestimmte Einsatzfaktoren nur begrenzt vorhanden, so kann es sein, dass man ab einer bestimmten Produktionsmenge auf einen kostenungünstigeren Prozess übergehen muss. Wie dieser Übergang aussieht, damit unter gegebenen Faktorrestriktionen die Kosten weiter minimiert werden, soll anhand des Beispiels erläutert werden.

Es werden dieselben Produktionsprozesse Y^1, Y^2 und Y^3 betrachtet. Da Y^3 nicht effizient ist, müssen nur Y^1 und Y^2 berücksichtigt werden. Die Faktorkosten sind $q_1 = q_2 = 3$. Ohne Faktorrestriktion wählt man Prozess Y^1, da er kostenminimal ist ($k_1 = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 24$, $k_2 = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 27$). Ist nun jedoch die vorhandene Menge des Faktors 2 beschränkt, so muss man ab einer bestimmten Produktionsmenge auch mit Y^2 produzieren. Wie der Substitutionsprozess abläuft, soll graphisch gezeigt werden. Es sind nun nur 20 Einheiten von Faktor 2 vorhanden. Mit Y^1 können dann maximal 5 Einheiten produziert werden. Möchte man mehr als 5 Einheiten produzieren, so muss man teilweise Y^2 einsetzen. Man wird jedoch versuchen, so viel wie möglich weiterhin mit Y^1 zu produzieren, da mit ihm niedrigere Produktionskosten verbunden sind. Wie der Minimalkostenpfad nun aussieht, wird in der Abbildung 26 gezeigt:

Der Minimalkostenpfad ist in der Graphik fett eingezeichnet. Man sieht, dass für Produktionsmengen größer 5 die Einsatzmenge von Faktor 2 immer maximal eingesetzt wird. Dies garantiert, dass so viel wie möglich mit Prozess Y^1 und so wenig wie nötig mit Prozess Y^2 produziert wird, da bei Prozess Y^1 der Faktor 2 relativ intensiv genutzt wird. Möchte man die Kostenfunktion für $x > 5$ ermitteln, so macht man sich diese Eigenschaft zu nutze. Die gewünschte

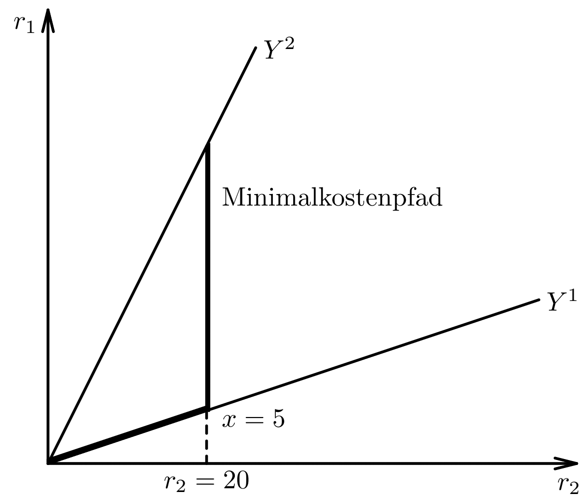

Abbildung 26: Minimalkostenpfad bei beschränkten Faktorressourcen

Menge soll nun von beiden Prozessen gemeinsam produziert werden:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -r_1 \\ -20 \\ x \end{pmatrix} &= a \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
r_1 &= 4a + 7b \\
20 &= 4a + 2b \\
x &= a + b
\end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem auf, so erhält man folgenden Zusammenhang:

$$r_1 = 10x - 30$$

Diesen Zusammenhang und $r_2 = 20$ setzt man nun in die Kostenfunktion ein:

$$\begin{aligned}
K &= 3 \cdot r_1 + 3 \cdot r_2 \\
&\leftrightarrow \quad K = 3 \cdot (10x - 30) + 3 \cdot 20 \\
K &= 30x - 30
\end{aligned}$$

Wenn die Einsatzmenge des Faktors 2 auf 20 Einheiten beschränkt ist, dann hat die Kostenfunktion folgende Form:

$$K = \left\{ \begin{array}{ll} 24x & \text{für } 0 \leq x \leq 5 \\ 30x - 30 & \text{für } 5 < x \leq 10 \end{array} \right\}$$

Sobald mehr als 5 Einheiten produziert werden sollen, steigen die Grenzkosten von 24 auf 30 an. Zwischen der Menge $x = 5$ und $x = 10$ sind sie dann jedoch konstant. Die Durchschnittskosten steigen hingegen an, bis sie bei der Menge $x = 10$ die Durchschnittskosten des zweiten Prozesses erreicht haben.

3.1.2 Aufgaben

1. Gegeben sei ein limitationaler Produktionsprozess. Beschrieben wird er durch folgende Faktorfunktionen:

$$\begin{aligned} r_1 &= 3 \cdot x \\ r_2 &= 2 \cdot x \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie die Isoquante für x = 2. Welche Kombinationen von Faktor 1 und 2 sind effizient?
b) Berechnen Sie Produktionskoeffizienten und Durchschnittsproduktivitäten.
c) Nun sei die Einsatzmenge der Faktoren begrenzt. Von Faktor 1 können maximal 12, von Faktor 2 maximal 10 Einheiten eingesetzt werden. Wieviele Einheiten von x können maximal produziert werden?
d) Der Preis von Faktor 1 beträgt 5, der von Faktor 2 ist 2. Berechnen Sie die Minimalkostenkombination für x = 2. Wie hoch sind dann die Kosten?
e) Stellen Sie die Kostenfunktion auf.

2. Ein Unternehmen produziert ein Produkt. Dafür stehen ihm vier Produktionsprozesse zur Verfügung, die durch folgende Produktionspunkte beschrieben sind:

$$\begin{aligned} Y^1 &: \; y_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \; Y^2 : y_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; Y^3 : y_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ Y^4 &: \; y_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zunächst sei angenommen, dass nur reine Prozesse realisierbar sind. Dies bedeutet, dass die Prozesse nicht gemischt werden können.
a) Stellen Sie für jeden Prozess die Faktoraufwandsfunktionen auf.
b) Zeichnen Sie den Prozessstrahl für jeden der vier Prozesse und die zur Ausbringungsmenge $x = 1$ zugehörigen Isoquanten.
c) Überprüfen Sie, ob alle Prozesse technisch effizient sind.
d) Die Preise der Einsatzfaktoren betragen 2 und 4 für die Faktoren 1 und 2. Berechnen Sie die Minimalkostenkombination für die Menge x = 3. Wie hoch sind die Kosten?
e) Berechnen Sie die Kostenfunktion. Zeichnen Sie den Minimalkostenpfad.
Nun seien die Prozesse mischbar.
f) Überprüfen Sie, welche Prozesse technisch effizient sind.
g) Ermitteln Sie nun erneut die Kostenfunktion.
h) Die Einsatzmenge von Faktor 1 sei nun auf 70 Einheiten beschränkt. Was wird das Unternehmen tun, wenn es mehr als 10 Einheiten von x produzieren und weiter seine Kosten minimieren will? Wie verändern sich die Stückkosten?

3. Einem Unternehmen stehen drei verschiedene Produktionsprozesse zur Verfügung:

$$Y^1 : y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}; \; Y^2 : y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \; Y^3 : y_3 = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -7/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Prozesse können beliebig gemischt werden.
a) Ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die effizienten Prozesse.
b) Die Preise der Faktoren seien nun jeweils 3. Ermitteln Sie die Kostenfunktion und zeichnen Sie den Minimalkostenpfad ein.
c) Wie verändert sich die Kostenfunktion, wenn die Einsatzmenge des Faktors 1 auf 21 Einheiten beschränkt ist?

3.2 Gutenberg-Produktionsfunktion

Eine weitere limitationale Produktionsfunktion wurde 1957 von Erich Gutenberg entwickelt. Erich Gutenberg berücksichtigt als erster, dass der Verbrauch einiger Faktoren nicht nur von der Ausbringungsmenge sondern auch von der technischen Fahrweise der Betriebsmittel abhängt. So ist z.B. der Stromverbrauch nicht nur von der produzierten Menge, sondern auch von den technischen Eigenschaften einer Maschine und der Produktionsgeschwindigkeit abhängig. Bei einer Gutenberg-Produktionsfunktion handelt es sich insofern um eine limitationale Produktionsfunktion, als dass bei jeder Produktionsgeschwindigkeit das Faktoreinsatzverhältnis eindeutig (technisch) determiniert ist. Im Gegensatz zu den ertragsgesetzlichen Produktionsfunktionen, welche den ganzen Betrieb betrachten, beschränkt sich Gutenberg auf ein einzelnes Aggregat. Dieses Aggregat kann z.B. eine Maschine oder ein Arbeitsplatz sein. Dadurch dass Gutenberg nur einzelne Aggregate betrachtet, kann er sehr viel detailierter die Auswirkungen von bestimmten Veränderungen untersuchen.

3.2.1 Ausgangspunkt

Gutenberg unterscheidet zwischen Werkstoffen, die direkt in die Produktion eingehen und Betriebsmitteln, die bei der Produktion genutzt werden und für die Leistungserstellung erforderlich sind. Die Betriebsmittel verschleißen mit der Nutzung und im Zeitablauf. Ihr Bestand wird jedoch bei kurzfristiger Betrachtung wie der Bestand an Arbeitskräften als konstant angesehen. Lediglich ihre Leistungsabgabe pro Zeiteinheit ist variabel. Weiter unterscheidet er zwischen Roh- und Betriebsstoffen einerseits, die direkt in die Produktion eingehen und die untereinander in einem limitationalem Verhältnis stehen sowie sich proportional zur Ausbringungsmenge entwickeln und anderseits den Betriebsstoffen, deren Verbrauch nicht nur von der Ausbringungsmenge, sondern auch von der Fahrweise eines Betriebsmittels abhängt.

Es rücken hier also einerseits die Betriebsmittel in den Mittelpunkt, deren Bestand zwar kurzfristig konstant ist, deren Leistungsabgabe jedoch innerhalb gewisser Grenzen durch verschiedene Fahrweisen variiert werden kann und anderseits die Verbrauchsfaktoren, deren Einsatzmenge von der Fahrweise abhängt. Durch verschiedene Fahrweisen der Betriebsmittel ist es dem Unternehmen möglich, auf Beschäftigungsschwankungen zu reagieren. Je nachdem, welche Fahrweisen man wählt, erhält man mit einer bestimmten Faktoreinsatzkombination verschiedene Ausbringungsmengen. Während bei den Produktionsfunktionen, die weiter oben diskutiert worden sind, immer ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Einsatzmenge der Faktoren und der Ausbringungsmenge besteht, existiert hier nur noch ein mittelbarer Zusammenhang, bei dem die spezifischen Eigenschaften der Betriebsmittel und ihre Einsatzbedingungen berücksichtigt werden. Dies bedeutet, dass mit denselben Faktoreinsatzmengen, abhängig von der Fahrweise, unterschiedliche Ausbringungsmengen produziert werden. Für das Unternehmen stellt sich nun die Frage, welche Fahrweise es wählen soll, um eine bestimmte Ausbringungsmenge möglichst günstig zu erhalten.

Die technischen Eigenschaften eines Betriebsmittels können durch die z-Situation beschrieben werden. Gibt z_h die Ausprägung der h-ten Eigenschaft an $h = 1, ...H$, so kann die z-Situation eines Betriebsmittels durch den Vektor $\underline{z}$ beschrieben werden. Betrachtet man z.B. einen Motor, so kann er durch die Anzahl der Ventile, seinen Hubraum, die maximale Kompression, usw. eindeutig beschrieben werden. Daraus kann dann auch die mögliche Leistungsabgabe bestimmt werden. Je nach z-Situation variieren die möglichen Fahrweisen und somit der Bereich der möglichen Leistungsabgabe pro Zeiteinheit. Generell wird angenommen, dass die z-Situation kurzfristig konstant ist und nur langfristig verändert werden kann.

Die Verbrauchsfaktoren, die an einem Betriebsmittel eingesetzt werden, weisen limitationale Beziehungen auf. Nur die Erhöhung der Einsatzmengen aller Betriebsmittel ermöglicht eine Erhöhung der Ausbringungsmenge. Dafür muss aber auch die Fahrweise des Betriebsmittels angepasst werden. Ein Unternehmen hat folgende mögliche Anpassungsformen.

3.2.2 Anpassungsformen

Die Ausbringungsmenge ist davon abhängig, wie lange mit welcher Geschwindigkeit und mit wievielen Aggregaten produziert wird. Formal kann dies auf folgende Weise geschrieben werden:

$$x = d \cdot t \cdot m \tag{59}$$

mit
d Intensität [Anzahl der Produkteinheiten pro Zeiteinheit]
t Produktionsdauer [Zeiteinheiten]
m Anzahl der eingesetzten Maschinen [Stück]
Hier wird davon ausgegangen, dass die eingesetzten Maschinen identisch sind. Um auf eine Änderung der Ausbringungsmenge zu reagieren, stehen einem Unternehmen somit drei Anpassungsmöglichkeiten zur Verfügung. Solange alle drei Anpassungsformen zur Verfügung stehen, wird es immer versuchen die kostengünstigste Form zu wählen. Im folgenden sollen die einzelnen Anpassungsformen näher beschrieben werden.

Zeitliche Anpassung

Es kann die Laufzeit t der Betriebsmittel variiert werden. Gibt es keine Mindestlaufzeit der Betriebsmittel, so ist die Untergrenze $t_{\min} = 0$. Die Obergrenze wird durch das Minimum aus maximal vereinbarter Arbeitszeit und maximaler Maschinenlaufzeit determiniert.

$$t \in [t_{\min}, t_{\max}]$$

Wird die maximal mögliche Laufzeit unterschritten, so bedeutet dies eine Verschwendung eines Teiles der vorhandenen Kapazität.

Quantitative Anpassung

Eine andere Anpassungsmöglichkeit besteht in der Variation der Betriebsmittel. Stehen insgesamt M Betriebsmittel des gleichen Funktionstyps zur Verfügung, so liegt der zulässige Bereich der Anpassung zwischen null und M, wobei beachtet werden muss, dass nur ganzzahlige Werte in Betracht kommen. Werden weniger als M Maschinen eingesetzt, so findet wiederum eine Verschwendung vorhandener Kapazitäten statt.

$$m \in [0, M]\,,\; m \in N$$

Intensitätsmäßige Anpassung

Hier wird die Produktionsgeschwindigkeit bzw. die Intensität des Betriebsmittels variiert. Die Intensität wird gemessen als Ausbringungsmenge pro Zeiteinheit

$$d = \frac{x}{t}. \tag{60}$$

Sie leitet sich aus den technischen Eigenschaften einer Maschine ab.

Meist besitzen Maschinen eine Mindestintensität, unter der nicht produziert werden kann. Die Maximalintensität wird determiniert durch das Minimum der maximalen Geschwindigkeit des Betriebsmittels und falls es von einer Arbeitskraft bedient werden muss, deren maximalen Arbeitsgeschwindigkeit.

$$d \in [d_{\min}, d_{\max}]\,.$$

Die verschiedenen Anpassungsformen können auch miteinander kombiniert werden.

Man sieht, dass die verschiedenen Anpassungsformen in substitutionaler Beziehung zueinander stehen. Man kann z.B. bei gegebener Ausbringungsmenge die Produktionszeit vermindern und dafür die Intensität erhöhen. In Abbildung 27 sind die verschiedenen Zeit-Intensitätskombinationen dargestellt, mit denen eine bestimmte Ausbringungsmenge hergestellt werden kann.

Ziel des Unternehmens ist es, diejenige Kombination aus Produktionszeit, Anzahl der Betriebsmittel und Intensität zu finden, bei der eine gegebene Ausbringungsmenge mit den geringsten Kosten produziert werden kann. Um die optimale Kombination aus zeitlicher, intensitätsmäßiger und quantitativer Anpassung zu finden, muss man die Verbrauchsfunktionen der einzelnen Faktoren kennen.

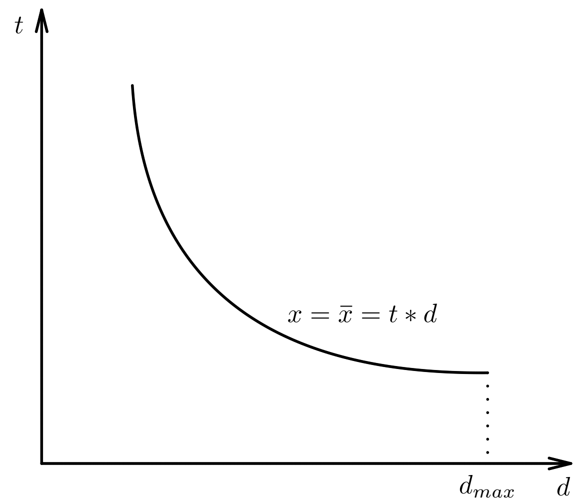

Abbildung 27: Substitution von Anpassungsformen

3.2.3 Verbrauchsfunktionen

Die Verbrauchsfunktion stellt den Kernpunkt bei Gutenberg dar. Sie gibt den Einsatz der mittelbar eingehenden Faktoren in Abhängigkeit von der Anzahl der Betriebsmittel und der Intensität an.

$$a_i = a_i\,(d, z) \qquad i = 1, ...I \tag{61}$$

Sie gibt also an, wie sich der Produktionskoeffizient eines Faktors i bei den verschiedenen Anpassungsformen verändert. Die Haupteinflussgröße ist dabei die Intensität. Mit jeder Variation der Intensität gelangt man zu einem neuen Produktionsprozess und somit zu einem neuen Produktionskoeffizienten. Abstrahiert man wie Gutenberg von der z-Situation, so kann man die Verbrauchsfunktion wie folgt schreiben:

$$a_i = a_i\,(d) \tag{62}$$

Je nach Art des Einsatzfaktors beobachtet man verschiedene Verläufe der Verbrauchsfunktion. In Abbildung 28 sind verschiedene Verläufe dargestellt. Oft wird beobachtet, dass der Verbrauch mit zunehmender Intensität zuerst fällt und danach wieder steigt. Somit gibt es eine Intensität, bei der der Verbrauch des betrachteten Faktors pro Ausbringungseinheit minimal wird.

Bei Gutenberg existiert nun zu jeder Intensität genau ein limitationaler Produktionsprozess. Betrachtet man nur zwei Einsatzfaktoren, so kann man den Produktionsprozess wieder mit Hilfe von Prozessgeraden darstellen (vgl. Abbildung 29).

Man sieht, dass bei Konstanz der Intensität wieder ein limitationaler Prozess vorliegt. Multipliziert man die Verbrauchsfunktion eines Faktors i mit der Ausbringungsmenge, so erhält man die Faktoreinsatzfunktion des Faktors i einer

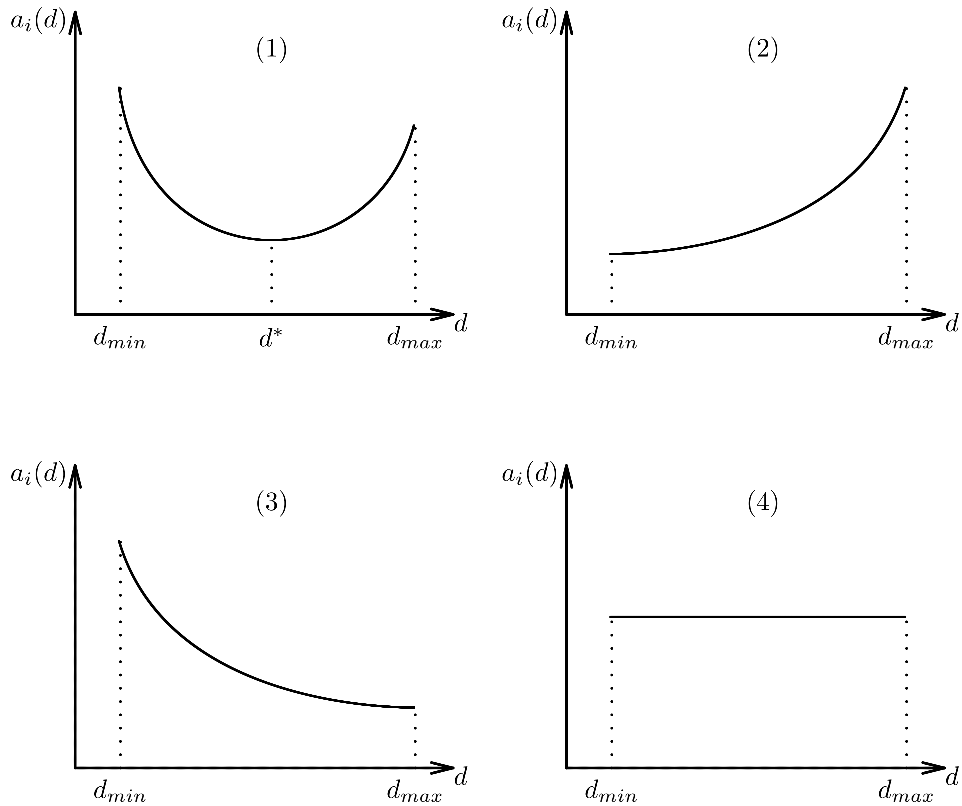

Abbildung 28: Mögliche Verläufe einer Verbrauchsfunktion

Gutenberg-Funktion.

$$r_i = a_i\,(d, z) \cdot x \qquad i = 1, ..., I \tag{63}$$

Beachtet man auch hier nur die Haupteinflussgröße Intensität, so hat die Faktoreinsatzfunktion folgende Form.

$$r_i\,(x) = a_i\,(d) \cdot x \qquad i = 1, ..., I \tag{64}$$

Die Ausbringungsmenge wiederum ist abhängig von der Intensität und der Produktionszeit.

$$x = d \cdot t \cdot m$$

Setzt man diese Beziehung in die Faktorverbrauchsfunktion ein, so erhält man

$$r_i = a_i\,(d) \cdot d \cdot t \cdot m \tag{65}$$

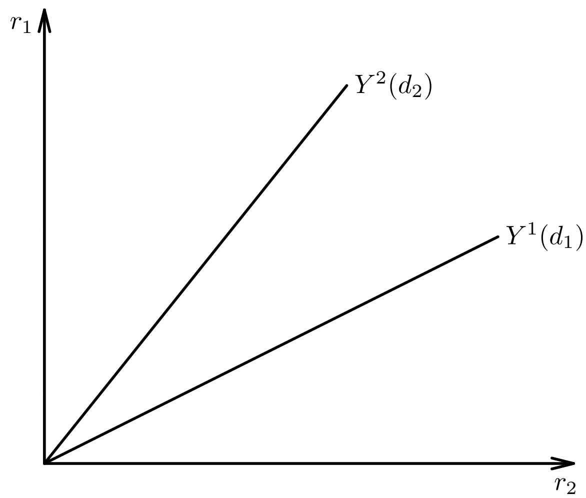

Abbildung 29: Prozessgeraden einer Gutenberg-Produktionsfunktion

Die Einsatzmenge r_i eines Faktors hängt nun von der Intensität, der Produktionszeit und von der Anzahl der eingesetzten Maschinen ab. Auf den Zusammenhang zwischen diesen Variablen und der Ausbringungsmenge wird weiter unten eingegangen.

Da bei einer Gutenberg-Produktionsfunktion sowohl die Ausbringungsmenge als auch die Faktoreinsatzmengen von der Fahrweise der Betriebsmittel abhängen, ist es sinnvoll, die zulässige Technologiemenge einer Gutenberg-Technologie in Abhängigkeit von den Parametern t, m, d anzugeben.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ m \\ d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} r_i = a_i\,(d) \cdot t \cdot m \cdot d \leq r_i^0 \quad i = 1, ..., I \\ x = t \cdot m \cdot d \geq x^0 \\ t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \\ m \in [0, 1, ..., M] \\ d_{\min} \leq d \leq d_{\max} \end{array} \right. \tag{66}$$

Die erste Zeile drückt aus, dass die benötigten Einsatzfaktoren nicht unbeschränkt vorhanden sind. Durch die Ungleichung in der zweiten Zeile wird eine Mindestausbringungsmenge gefordert. Die nachfolgenden Zeilen drücken aus, was oben hinsichtlich Zeit, Intensität und Anzahl der eingesetzten Betriebsmittel diskutiert worden ist.

Nachdem nun gezeigt worden ist, von welchen Variablen die Einsatzmenge eines Faktors abhängig ist, sollen nun verschiedene Faktoreinsatzfunktionen in Abhängigkeit der einzelnen Variablen betrachtet werden.

Faktoreinsatzfunktion bei rein zeitlicher Anpassung

Reagiert man auf eine Änderung der Ausbringungsmenge durch eine Variation der Produktionszeit, so verläuft die Faktoreinsatzfunktion linear. Die Steigung ist dabei abhängig von der gewählten Intensität. Zur Vereinfachung soll

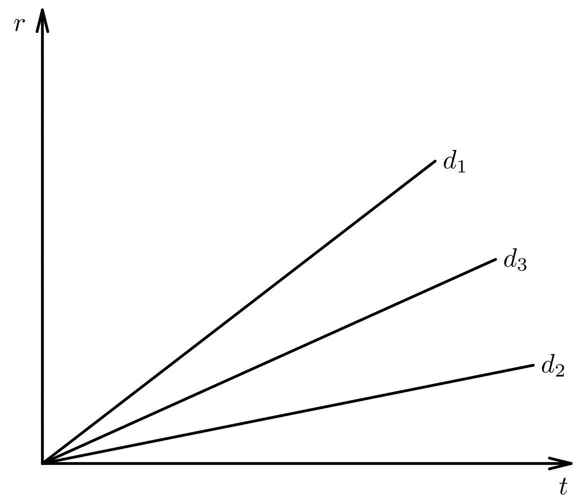

Abbildung 30: Faktoreinsatzfunktionen in Abhängigkeit von der Zeit

dies und alle weiteren Funktionen anhand eines Beispiels demonstriert werden. Es liegt folgende Verbrauchsfunktion vor:

$$a(d) = d^2 - 5d + 10$$

Die Intensität, bei der der Verbrauch pro Ausbringungseinheit minimal wird, beträgt $d = 2,5$. Die Faktoreinsatzfunktion erhält man wieder durch Multiplikation mit der Ausbringungsmenge

$$r = a\,(d) \cdot x.$$

Mit

$$x = d \cdot t \cdot m$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} r &= \left(d^2 - 5d + 10\right) \cdot d \cdot t \cdot m \\ &= \left(d^3 - 5d^2 + 10d\right) \cdot t \cdot m. \end{aligned}$$

Wird nur die Zeit variiert, so erhalten wir folgende die in Abbildung 30 dargestellten Funktionsverläufe.

Der Faktorverbrauch nimmt mit zunehmender Produktionszeit proportional zu. Die Steigung ist dabei von der Intensität abhängig. Stellt man die Faktorverbrauchsfunktion in Abhängigkeit der Ausbringungsmenge bei rein zeitlicher Variation dar, so erhält man wiederum einen linearen Verlauf:

$$\begin{aligned} r &= \left(d^2 - 5d + 10\right) \cdot d \cdot t \cdot m \\ &= \left(d^2 - 5d + 10\right) \cdot x = a(d) \cdot x \end{aligned}$$

Die Steigung und somit der Grenzverbrauch wird minimal, wenn mit der optimalen Intensität produziert wird. In dem speziellen Fall erhalten wir für $d^* = 2,5$ dann die Verbrauchsfunktion

$$r = 3,75 \cdot x$$

Eine Abweichung von der optimalen Intensität führt immer zu einer Zunahme der Steigung.

Faktorfunktionen bei rein intensitätsmäßiger Anpassung

Nachdem nun verschiedene Funktionen bei zeitlicher Anpassung analysiert worden sind, werden nun Funktionsverläufe bei intensitätsmäßiger Anpassung betrachtet. Wieder soll dies an dem eingeführten Beispiel erfolgen. Die Verbrauchsfunktion hat bei rein intensitätsmäßiger Anpassung folgende Form (vgl. Abbildung 31):

$$a(d) = d^2 - 5d + 10$$

Nun wird der Faktorverbrauch abgleitet, wenn eine rein intensitätsmäßige An-

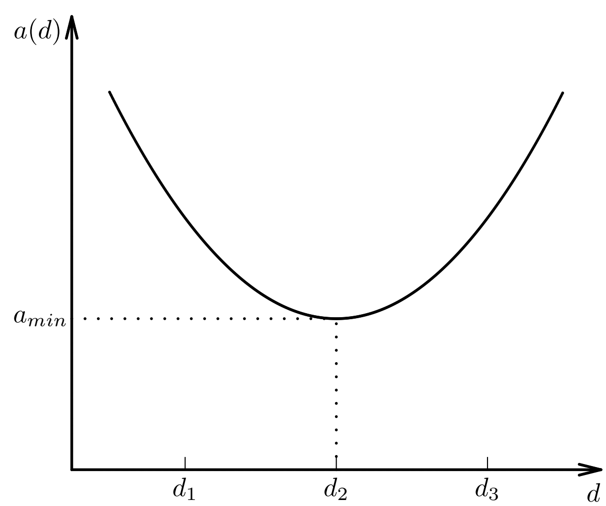

Abbildung 31: Verbrauchsfunktion

passung betrieben wird.

$$\begin{aligned} r &= \left(d^2 - 5d + 10\right) \cdot d \cdot t \cdot m \\ &= \left(d^3 - 5d^2 + 10d\right) \cdot \bar{t} \cdot \bar{m} \end{aligned}$$

Für ein bestimmtes $\bar{t}$ und $\bar{m}$ sieht der Faktorverbrauch dann wie in Abbildung 32 aus.

Es ensteht ein S-förmiger Verlauf. Mit Variation der Einsatzzeit dreht sich die Funktion mit Fixpunkt im Ursprung. Doch anders als beim klassischen Ertragsgesetz ist dieser nun auf die Variation der Produktionsgeschwindigkeit zurückzuführen. Möchte man nun daraus die Faktoreinsatzfunktion in Abhängigkeit

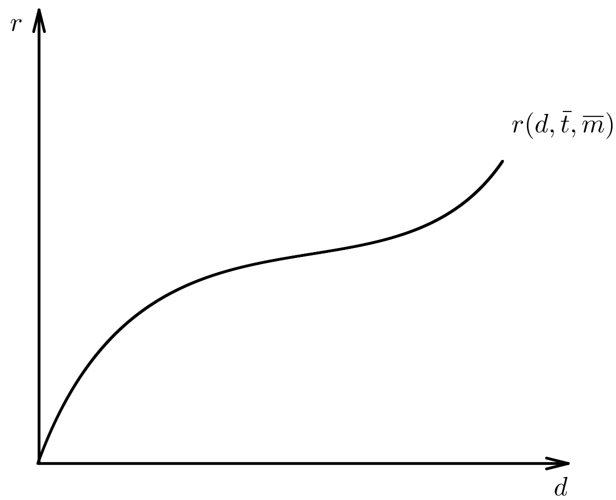

Abbildung 32: Faktoreinsatzfunktion in Abhängigkeit von der Intensität

von der Produktionsmenge ableiten, wobei immer nur eine intensitätsmäßige Anpassung gemacht wird, so muss man die Intensität mit der Zeit multiplizieren.

$$\begin{aligned} r &= \left(d^3 - 5d^2 + 10d\right) \cdot \bar{t} \quad \text{mit } m = 1 \\ &= \frac{x^3 - 5 \cdot x^2 \cdot \bar{t} + 10 \cdot x \cdot \bar{t}^2}{\bar{t}^2} \end{aligned}$$

Für $m = 1$ und $\bar{t} = 5$ ergibt sich ein Verlauf, wie in Abbildung 33 dargestellt:

Man sieht, dass der Grenzverbrauch zuerst abnimmt und dann ab einer bestimmten Ausbringungsmenge zunimmt. Der Grenzverbrauch wird minimal in dem Punkt, in welchem mit der optimalen Intensität produziert wird. Graphisch bedeutet dies, dass in diesem Punkt die Ursprungsgerade zur Tangente wird.

Faktorfunktion bei rein quantitativer Anpassung

Zuletzt soll nun noch erläutert werden, wie es aussieht, wenn man eine rein quantitative Anpassung betreibt. Sowohl die Produktionszeit als auch die Intensität sind konstant. Mann kann nur die Anzahl der eingesetzten Aggregate m variieren. Die Verbrauchsfunktion hat dann folgende Form

$$r = a\,(d) \cdot d \cdot t \cdot m$$

bzw.

$$r = \left(\bar{d}^3 - 5\bar{d}^2 + 10\bar{d}\right) \cdot \bar{t} \cdot m$$

Da m nur ganzzahlige Werte annimmt, erhält man einen Funktionsverlauf, wie in Abbildung 34 dargestellt.

Nachdem nun der Verlauf der Faktorverbrauchsfunktion bei Variation einer Variablen erläutert worden ist, soll nun überlegt werden, wie der Verlauf bei

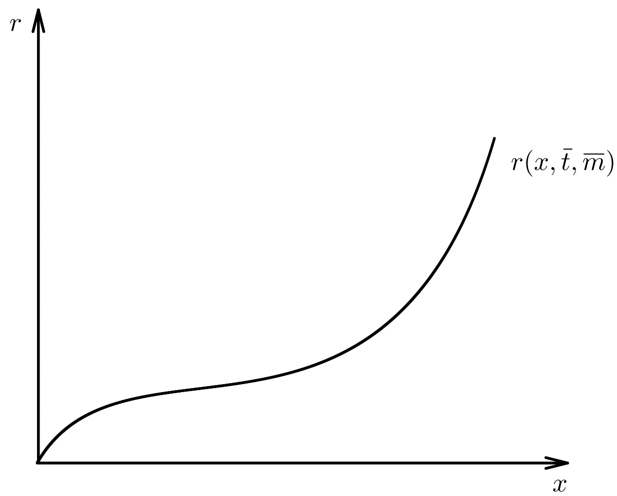

Abbildung 33: Faktoreinsatzfunktion bei intensitätsmäßiger Anpassung

Variation mehrerer Variablen aussieht. Dadurch soll ermittelt werden, welche Anpassungsform die optimale ist, wenn der Verbrauch eines Faktors minimiert werden soll. Im weiteren werden nur noch zeitliche und intensitätsmäßige Anpassungen betrachtet. Es wird angenommen, dass die Anzahl der eingesetzten Maschinen konstant ist.

Zeitliche und intensitätsmäßige Anpassung

Bei einer konstanten Zahl an Maschinen kann ein Unternehmen die gewünschte Ausbringungsmenge mit verschiedenen Kombinationen an Einsatzzeit und Intensität herstellen. Es stellt sich nun die Frage, welche Kombination es wählen soll, wenn es die Einsatzmenge eines Faktors minimieren möchte. Es soll angenommen werden, dass eine quadratische (U-förmige) Verbrauchsfunktion vorliegt, deren Minimum bei d^* liegt. Um die Faktoreinsatzmenge zu minimieren, muss nun dass Unternehmen so lange wie möglich mit d^* produzieren. Auf Änderungen der Ausbringungsmenge sollte es durch eine Variation der Einsatzzeit reagieren. Kann das Unternehmen die gewünschte Ausbrinungsmenge in der vorhandenen Zeit nicht mit d^* produzieren; gilt also

$$x > d^* \cdot t_{\max},$$

dann minimiert es die Faktoreinsatzmenge, indem es die Intensität so stark erhöht, dass es in der maximal vorhandenen Zeit gerade die gewünschte Ausbringungsmenge herstellen kann; es gilt also:

$$d = \frac{x}{t_{\max}}.$$

Zusammengefasst sieht die optimale Wahl der Intensität bei Minimierung

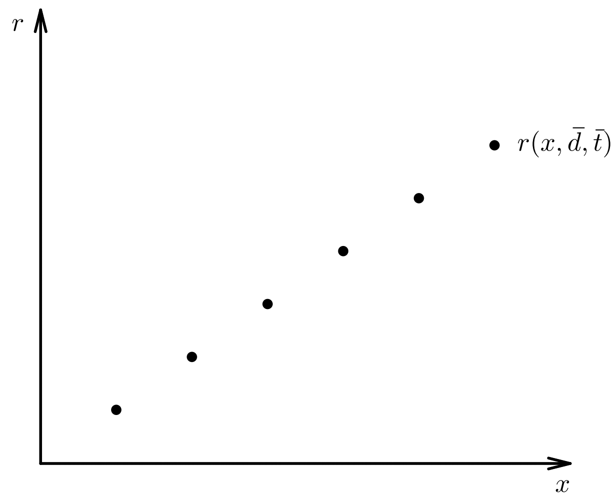

Abbildung 34: Faktorverbrauchsfunktion bei quantitativer Anpassung

der Einsatzmenge wie folgt aus:

$$d = \begin{cases} d^*, \text{ für } x \leq d^* \cdot t \\ \frac{x}{t_{\max}}, \text{ für } x > d^* \cdot t \end{cases} \tag{67}$$

Optimal ist diese Vorgehensweise, weil bei einer Erhöhung der Intensität über d^* die Einsatzmenge mit der dritten Potenz, bei einer Erhöhung der Einsatzzeit jedoch nur linear ansteigt.

Bis jetzt ist immer nur ein Einsatzfaktor betrachtet worden. Typischerweise werden jedoch mehrere Faktoren eingesetzt, deren Verbrauch ebenfalls von der Intensität und der Einsatzzeit abhängen. Ohne dass die Einsatzfaktoren mit den Faktorpreisen bewertet werden, ist die Bestimmung der optimalen Intensität nun nicht mehr möglich.

Nachdem die produktiven Eigenschaften einer Gutenberg-Produktionsfunktion erörtert worden sind, wird nun untersucht, wie die Kosten in Abhängigkeit der betrachteten Parameter verlaufen. Als erstes soll die Kostenfunktion aufgestellt werden. Danach sollen die einzelnen Parameter isoliert variiert werden, um die Veränderung der Kosten zu untersuchen.

3.2.4 Kostenfunktion

Wie in der Einführung bereits beschrieben wurde, kann eine Kostenfunktion allgemein in folgender Form dargestellt werden:

$$K = \sum_{i=1}^{I} r_i \cdot q_i$$

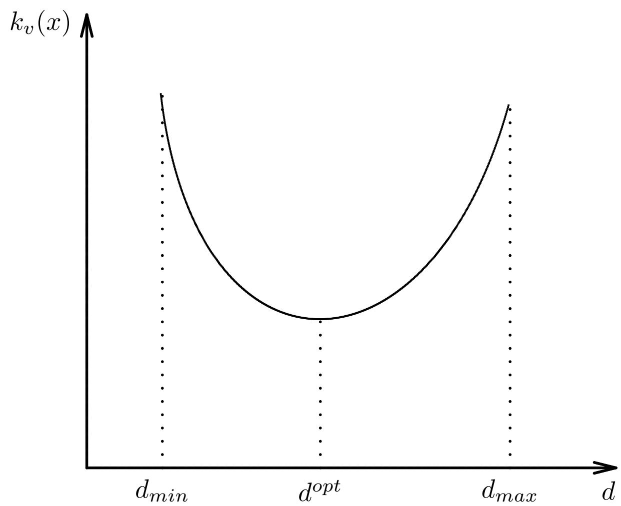

Abbildung 35: Stückkostenverlauf bei intensitätsmäßiger Anpassung

Die Kosten ergeben sich als Summe der mit den Faktorpreisen gewichteten Faktoreinsatzmengen. Mit

$$r_i = a_i\,(d) \cdot x$$

erhält man

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{I} a_i\,(d) \cdot x \cdot q_i \\ K &= \left(\sum_{i=1}^{I} a_i\,(d) \cdot q_i \right) \cdot x \end{aligned} \tag{68}$$

Aus der Formel ist zu erkennen, dass bei konstanter Intensität keine Fixkosten vorliegen und die Kostenfunktion einer Gutenberg-Produktionsfunktion linear verläuft. Nun ist einfach zu analysieren, wie sich die Kosten bei den verschiedenen Anpassungsformen verhalten.

Zeitliche Anpassung

Als erstes soll nun untersucht werden, wie sich die Kosten bei rein zeitlicher Anpassung verhalten. Dabei wird die Laufzeit und damit auch die Arbeitszeit variiert. Die Anzahl der eingesetzten Maschinen sowie die Intensität wird konstant gehalten. Man erhält dann eine Produktionsfunktion der folgenden Form

$$x = t \cdot \bar{m} \cdot \bar{d}$$

Die Produktionskoeffizienten sind konstant, da sie nicht von der Laufzeit abhängen. Somit erhält man eine limitationale Produktionsfunktion, bei der sich die Ausbringungsmenge in Abhängigkeit der Laufzeit verändert. Organisatorisch ist eine zeitliche Anpassung über die Variation von Schichten, Kurzarbeit, Überstunden und Nichtausnützung der vorhandenen Arbeitszeit möglich. Die Kostenfunktion verläuft linear und hat folgende Form:

$$K = \left(\sum_{i=1}^{I} a_i \left(d \right) \cdot q_i \right) \cdot x$$

mit der Steigung

$$\frac{\partial K}{\partial x} = k \left(d \right) = \left(\sum_{i=1}^{I} a_i \left(d \right) \cdot q_i \right)$$

Man sieht, dass die Steigung bzw. die Grenz- oder Stückkosten nun nur noch von der Intensität abhängen. Die Stückkostenfunktion einer Gutenberg-Produktionsfunktion hat aufgrund des U-förmigen Verlaufs der Verbrauchsfunktionen ebenfalls einen U-förmigen Verlauf in Abhängigkeit der Intensität (vgl. Abbildung 35).

$$k \left(d \right) = \sum_{i=1}^{I} a_i \left(d \right) \cdot q_i$$

Die Kostenfunktion bei reiner zeitlicher Anpassung verläuft linear (vgl. Abbildung 36). Ihre Steigung ist minimal, wenn die Stückkosten minimal bzw. mit der kostenoptimalen Intensität produziert wird.

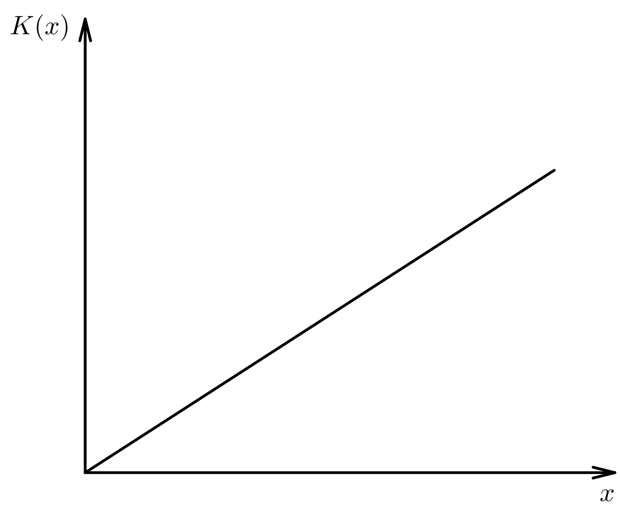

Abbildung 36: Kostenfunktion bei zeitlicher Anpassung

Bis jetzt wurde bei der zeitlichen Anpassung unterstellt, dass die Faktorkosten konstant sind. Nun gibt es jedoch auch Einsatzfaktoren, deren Kosten in der Zeit variieren. So erhöhen sich die Kosten für eine Einheit Arbeit ab einem bestimmten Zeitpunkt, da Überstunden gemacht werden müssen, was mit einem Überstundenzuschlag verbunden ist. Die Tatsache, dass ab einer bestimmten Einsatzzeit ein Überstundenzuschlag gezahlt werden muss, kann wie folgt berücksichtigt werden. Der Faktor Arbeit sei mit r_a bezeichnet, wobei $a \in [1, ..I]$. Der Preis einer Einheit Arbeit sei q_a und der Überstundenzuschlag sei $q_a^{Ü}$. Weiterhin sei nur eine zeitliche Anpassung möglich. Daraus folgt, dass die maximale Menge, welche in der Normalarbeitszeit produziert werden kann

$$x_{\max} = \frac{r_a^{normal}}{a_a\left(d\right)}$$

beträgt. Dabei bezeichnet r_a^{normal} die maximale Menge an Arbeit, für welche kein Überstundenzuschlag gezahlt werden muss. Die Kostenfunktion hat nun folgende Form:

$$\begin{aligned} K &= \left(\sum_{i=1;i\neq a}^{I} a_i\left(d\right)\cdot q_i\right)\cdot x + a_a\left(d\right)\cdot q_a\cdot x_{\max} + a_a\left(d\right)\cdot\left(q_a + q_a^{Ü}\right) \\ \cdot\left(x - x_{\max}\right), \quad x &\geq x_{\max} \qquad (69) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{I} a_i\left(d\right)\cdot q_i\right)\cdot x + a_a\left(d\right)\cdot q_a^{Ü}\cdot\left(x - x_{\max}\right), \quad x \geq x_{\max} \qquad (70) \end{aligned}$$

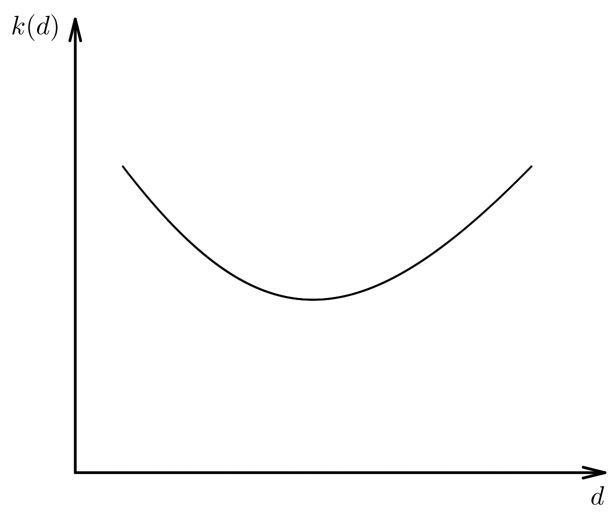

Abbildung 37: Stückkostenfunktion bei intensitätsmäßiger Anpassung

Kostenverlauf bei rein intensitätsmäßiger Anpassung

Da die Stückkostenfunktion einen U-förmigen Verlauf in Abhängigkeit der Intensität hat, hat die Kostenfunktion in einen S-förmigen Verlauf. Dies soll anhand eines Beispiels demonstriert werden.

Zur Produktion eines Gutes werden zwei Faktoren benötigt. Sie haben folgende Verbrauchsfunktionen

$$\begin{aligned} a_1(d) &= d^2 - 5d + 20 \\ a_2(d) &= d^2 - 10d + 30 \end{aligned}$$

Die Faktorpreise sind $q_1 = 2$ und $q_2 = 4$. Als erstes soll die Stückkostenfunktion berechnet werden.

$$\begin{aligned} k(d) &= q_1 \cdot a_1(d) + q_2 \cdot a_2(d) \\ &= 2 \cdot \left(d^2 - 5d + 20\right) + 4 \cdot \left(d^2 - 10d + 30\right) \\ k(d) &= 6d^2 - 50d + 160 \end{aligned}$$

Man sieht in Abbildung 37, dass sie einen U-förmigen Verlauf hat.

Die stückkostenminimale Intensität erhält man, indem man die Stückkosten nach der Intensität ableitet und null setzt:

$$\begin{aligned} k'(d) &= 12d - 50 \\ k'(d) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \quad d^* = \frac{25}{6} \approx 4,167 \end{aligned}$$

Nachdem nun die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Intensität bei rein intensitätsmäßiger Anpassung ermittelt wurde, ist es einfach daraus die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Ausbringungsmenge abzuleiten.

$$\begin{aligned} K &= \left[6d^2 - 50d + 160\right] \cdot t \cdot d \\ K(x) &= \frac{6x^3 - 50tx^2 + 160t^2x}{t^2} \end{aligned}$$

Wiederum verläuft die Kostenfunktion S-förmig. In Abbildung 38 werden die Kostenfunktionen für $t = 1$ und $t = 2$ dargestellt.

Man sieht, dass es bis zu einer bestimmten Ausbringungsmenge besser ist nur eine Zeiteinheit zu produzieren und die Intensität anzupassen. Danach ist es besser zwei Zeiteinheiten lang mit einer niedrigeren Intensität zu produzieren. Dies liegt daran, dass der Faktorverbrauch und somit die Kosten bei einer Erhöhung der Intensität ab einem bestimmten Punkt quadratisch ansteigen. Bei einer Erhöhung der Einsatzzeit steigen sie hingegen nur linear an. Welche Anpassungsformen allgemein optimal sind, wird im nächsten Abschnitt besprochen.

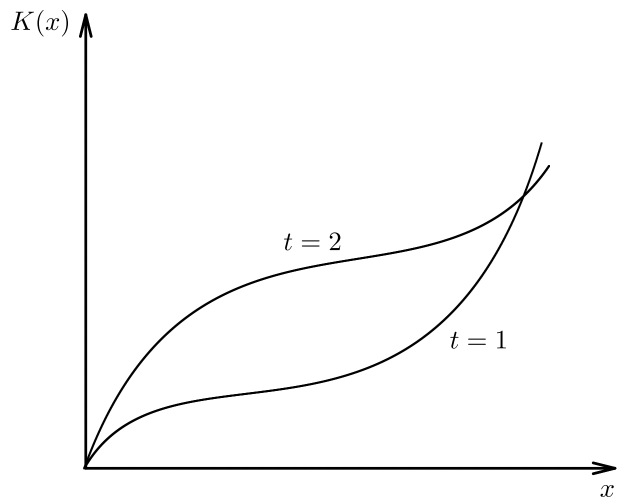

Abbildung 38: Kostenfunktionen bei intensitätsmäßiger Anpassung

Optimale Anpassung

Normalerweise haben Unternehmen die Möglichkeit, sowohl eine zeitliche als auch eine intensitätsmäßige Anpassung zu betreiben. Teilweise können sie auch eine quantitative Anpassung betreiben. Dies setzt jedoch meist voraus, dass Maschinen stillgelegt werden bzw. anders genützt werden können. Allen drei Anpassungsformen sind, wie bereits weiter oben besprochen, Grenzen gesetzt. Dies hat zur Folge, dass nicht immer die günstigste Anpassungsform gewählt werden kann. In diesem Abschnitt wird nun besprochen, welche Anpassungsform ein Unternehmen wählen soll. Zuerst soll dabei unterstellt werden, dass keine Restriktionen vorliegen. Danach soll überlegt werden, wie die optimale Anpassungsform aussieht, wenn man den realistischeren Fall betrachtet, dass man die einzelnen Anpassungen nicht unendlich betreiben kann.

Zeitliche versus intensitätsmäßige Anpassung

Weiter oben wurde bereits besprochen, wie die Einsatzmenge eines Faktors minimiert wird, wenn man sowohl die Einsatzzeit als auch die Intensität frei wählen kann. Dieselben Überlegungen gelten für die Minimierung der Kosten. Solange es möglich ist, produziert man mit der stückkostenminimalen Intensität d^{opt}. Erst wenn man mit der stückkostenminimalen Intensität in der vorhandenen maximalen Einsatzzeit nicht mehr die gewünschte Ausbringungsmenge produzieren kann, erhöht man die Intensität. Auch hier erhöht man die Intensität nur so weit, dass man in der maximal vorhandenen Einsatzzeit gerade die gewünschte Ausbringungsmenge produziert.

$$d = \frac{x}{t_{\max}}.$$

$$d = \begin{cases} d^{opt}, \text{ für } x \leq d^{opt} \cdot t_{\max} \\ \frac{x}{t_{\max}}, \text{ für } x > d^{opt} \cdot t_{\max} \end{cases} \tag{71}$$

Es wurde gezeigt, dass es immer optimal ist, die gesamte Ausbringungsmenge mit nur einer Intensität zu produzieren. Zu diesem Ergebnis kam auch Gutenberg. Andere Autoren haben jedoch gezeigt, dass auch Fälle eintreten können, in welchen es optimal ist, mit mehr als nur einer Intensität zu produzieren. Die Produktion mit zwei oder mehr Intensitäten wird auch Intensitätssplitting genannt.

Intensitätssplitting

Bei bestimmten Verläufen der Stückkostenfunktion kann es eintreten, dass es optimal ist, mit zwei verschiedenen Intensitäten zu produzieren. Als erster zeigt dies Glaser. Er geht von einem Betrachtungszeitraum gegebener Länge aus, welchen er in Z Zeitabschnitte unterteilt. Nun besteht das Problem darin, die Intensität d_z für jeden Zeitabschnitt t_z zu finden, so dass die Kosten minimiert werden. Er löst dieses Problem mit Hilfe des folgenden Lagrange-Ansatzes:

$$L(d_z, \lambda) = \sum_{z=1}^{Z} c(d_z) \cdot t_z - \lambda \cdot \left(\sum_{z=1}^{Z} d_z \cdot t_z - \bar{x} \right)$$

Ist der Zeitraum vorgegeben, so ist es für bestimmte Zeitintervalle optimal, Intensitätssplitting mit zwei verschiedenen Intensitäten zu betreiben. Allerdings ist es mit dem Ansatz von Glaser nicht möglich die kostenminimale Lösung zu finden, da die Zeitintervalle nicht endogen bestimmt werden. Aus diesem Grund wählt Lambrecht einen erweiterten Lagrange-Ansatz, bei dem auch die Zeitintervalle endogen bestimmt werden. Der Ansatz sieht dann wie folgt aus:

$$L(d_z, t_z, \lambda, \mu) = \sum_{z=1}^{Z} c(d_z) \cdot t_z - \lambda \cdot \left(\sum_{z=1}^{Z} d_z \cdot t_z - \bar{x} \right) - \mu \cdot \left(\sum_{z=1}^{Z} t_z - \bar{t} \right)$$

Durch den Term $\mu \cdot \left(\sum_{z=1}^{Z} t_z - \bar{t} \right)$ berücksichtigt Lambrecht,dass die Summe der Zeitintervalle wieder den vorgegebenen Zeitraum ergeben. Auch er kommt zu dem Ergebnis, dass es optimal sein kann Intensitätssplitting zu betreiben.

Weitere Autoren untersuchten das Intensitätssplitting mit Hilfe von anderen mathematischen Methoden und kommen zu ähnlichen Ergebnissen. U.a. wird die Variationsrechnung unter Nebenbedingungen und die lineare Programmierung verwendet. Bis jetzt wurde das Problem des Intensitätssplittings in sehr vereinfachten, realitätsfernen Situationen untersucht. Aus diesem Grund haben einige Autoren den Einfluss von diversen Erweiterungen untersucht. So wurde untersucht, welchen Einfluss verschiedene entscheidungsrelevante Kostenarten wie Kosten der Intensitätsumstellung oder Kosten für Lagerbestände, die aufgrund der uneinheitlichen Produktionsgeschwindigkeit entstehen, haben. Liegen nur Kosten der Intensitätsumstellung vor, so ist es offensichtlich, dass der Vorteil des Intensitätssplittings sich verringert. Lagerkosten entstehen, wenn die

Produktionsgeschwindigkeit größer als die Absatzgeschwindigkeit ist. Die Menge, welche mehr produziert als abgesetzt wird, muss gelagert werden, was u.a. zu Lagerraum- und Kapitalbindungskosten führt. Pack untersucht nun, wie oft die Intensität gewechselt werden soll, wenn konstante Umstellungskosten und quadratische Lagerhaltungskosten vorliegen. Das Problem ist einfach mit Hilfe der Differentialrechnung zu lösen. Komplizierter wird das Problem, wenn die Umstellungskosten von der Höhe der Intensität abhängen und auch Fehlermengenkosten beachtet werden. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Bis jetzt wurde immer untersucht, ob Intensitätssplitting vorteilhaft ist, wenn dies die einzig mögliche Anpassungsform ist. Es wurde also unterstellt, dass sowohl die Produktionszeit als auch die Anzahl der Maschinen konstant sind. Sind mehrere Anpassungsformen möglich, so wird das Problem komplizierter. Sind z.B. sowohl intensitätsmäßige als auch zeitliche Anpassungen möglich, so kann die Lösung nicht mehr mit Hilfe des Lagrange Ansatzes, sondern nur mit Hilfe des Kuhn-Tucker-Theorems berechnet werden. Als Ergebnis erhält man, dass, solange $\frac{\bar{x}}{\bar{t}} \leq d^*$ *gilt, die gewünschte Menge mit der optimalen Intensität* d^* *produziert wird und nur zeitlich angepasst wird. Soll mehr als* $x = d^* \cdot \bar{t}$ *produziert werden, so wird rein intensitätsmäßige Anpassung betrieben, was auch wieder Intensitätssplitting bedeuten kann. Wieder kann das Problem verfeinert werden, indem man Stillstand- und Leerlaufkosten berücksichtigt. Berücksichtigt man z.B. Leerlaufkosten, so wird man mit einer Intensität* $d_L^* < d^*$ *produzieren, um so die Leerlaufzeit und die damit verbundenen Kosten zu verringern.*

Ist zusätzlich auch noch eine quantitative Anpassung möglich, so kann man die optimale Anpassungsstrategie mit Hilfe der dynamischen Programmierung berechnen.

Es wurde gezeigt, dass in Situationen, in welchen man zwischen zeitlicher und intensitätsmäßiger Anpassung wählen kann, immer zuerst zeitliche Anpassung bei kostenminimaler Intensität betreibt. Erst wenn die verfügbare Zeit voll ausgeschöpft ist, wird die Intensität angepasst. Dabei wurde jedoch immer unterstellt, dass die Faktorkosten nicht abhängig von der Einsatzzeit sind. Weiter oben wurde jedoch bereits erläutert, dass z.B. die Kosten des Faktors Arbeit ab einem bestimmten Zeitpunkt ansteigen können, da ein Überstundenzuschlag gezahlt werden muss. Ist dies der Fall, so kann es vorteilhaft sein, bereits zu einem früheren Zeitpunkt intensitätsmäßige Anpassung zu betreiben. Und zwar immer dann, wenn nach Ausnützung der Normalarbeitszeit die Grenzkosten bei zeitlicher Anpassung die Grenzkosten bei intensitätsmäßiger Anpassung übersteigen. Welche Anpassungsformen man für eine Ausbringungsmenge, welche nicht mehr mit d^* in der Normalarbeitszeit hergestellt werden kann, wählen sollte, muss im konkreten Fall durch einen Kostenvergleich ermittelt werden.

Zeitliche und intensitätsmäßige Anpassung versus quantitative Anpassung

Ein Unternehmen kann neben der Produktionszeit und -geschwindigkeit auch die Anzahl der eingesetzten Maschinen variieren. Der Einsatz einer zusätzlichen Maschine ist mit zusätzlichen Fixkosten verbunden, welche aus Anlaufkosten, Wartungskosten etc. bestehen. Bei der quantitativen Anpassung entstehen also sprungfixe Kosten. Diese Kosten können nicht abgebaut werden, wenn die

Anzahl der Maschinen wieder vermindert wird. Aus diesem Grund spricht man auch von Kostenremanenz.

Um nun herausfinden zu können, welche Anpassungsform kostenminimal ist, muss man wieder einen Kostenvergleich für jede Anpassungsform machen. Der Anpassungsprozess sieht wie folgt aus:

Zu Beginn produziert man mit der kostenminimalen Intensität d^* bis die maximal verfügbare Zeit $t_{\max}$ ausgeschöpft ist. Danach betreibt man solange intensitätsmäßige Anpassung, bis die Kosten bei rein intensitätsmäßiger Anpassung den Kosten bei quantitativer Anpassung und optimaler Intensität d^* entsprechen. Daraufhin erhöht man die Anzahl der Maschinen und produziert wieder mit der optimalen Intensität, bis die zur Verfügung stehende Zeit ausgeschöpft ist.

Durch die Berücksichtigung weiterer Kostenarten, wie Lagerkosten, Fehlmengenkosten usw. kann die Anlayse weiter verfeinert werden. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

3.2.5 Beispiele und Aufgaben

Beispiel

Für die Herstellung eines Produkts setzt ein Unternehmen eine Maschine ein. Es benötigt drei Faktoren, deren Verbrauchsfunktionen wie folgt aussehen.

$$\begin{aligned} a_1(d) &= 1,5 \cdot d^2 - 3 \cdot d + 2 \\ a_2(d) &= d^2 - 24 \cdot d + 250 \\ a_3(d) &= 2 \cdot d^2 - 24 \cdot d + 75 \end{aligned}$$

Die Intensität kann zwischen $d_{\min} = 2$ und $d_{\max} = 10$ kontinuierlich variiert werden. Als erstes soll der inputeffiziente Bereich ermittelt werden. Ein Bereich ist inputeffizient, wenn sich durch eine Variation der Intensität nicht der Verbrauch aller Einsatzfaktoren verringert. Um diesen Bereich zu finden, muss man die Minima der einzelnen Verbrauchsfunktionen ermitteln.
Faktor 1: $d_{1,\min} = 1$
Faktor 2: $d_{2,\min} = 12$
Faktor 2: $d_{3,\min} = 6$
Der inputeffiziente Bereich der Intensität liegt nun zwischen $d_{1,\min} = 1$ und $d_{3,\min} = 12$. Somit ist der ganze zugelassene Intensitätsbereich $[2, 10]$ inputeffizient. Ist die Intensität kleiner $d_{1,\min} = 1$, so kann durch eine Erhöhung der Intensität der Verbrauch aller Faktoren gesenkt werden. Ist die Intensität größer als $d_{3,\min} = 12$, so kann durch eine Verringerung der Intensität der Verbrauch aller Faktoren gesenkt werden. Dies bedeutet jeweils, dass keine Inputeffizienz vorliegt. Folgende Abbildung veranschaulicht das Ergebnis graphisch.

Die Preise der Einsatzfaktoren sind $q_1 = 2$, $q_2 = 5$, $q_3 = 1$. Die Stückkostenfunktion sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} k(d) &= 2 \cdot \left(1,5 \cdot d^2 - 3 \cdot d + 2\right) + 5 \cdot \left(d^2 - 24 \cdot d + 250\right) + 1 \cdot \left(2 \cdot d^2 - 24 \cdot d + 75\right) \\ &= 10 \cdot d^2 - 150 \cdot d + 1329 \end{aligned}$$

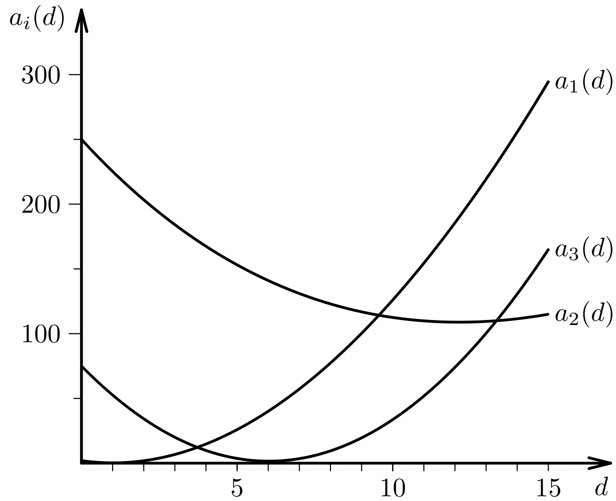

Abbildung 39: Verbrauchsfunktionen

Die kostenminimale Intensität berechnet man nun, indem man das Minimum der Stückkostenfunktion ermittelt

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial d} &= 20d - 150 = 0 \\ d^* &= 7,5 \end{aligned}$$

Produziert man mit der Intensität d^*, so sind die Stückkosten minimal. Sie betragen $k(d^*) = 766,5$. Liegen keine zeitlichen Restriktionen vor, so wird das Unternehmen immer mit d^* produzieren. Die Kostenfunktion hat dann folgende Form

$$K(x) = 766,5 \cdot x$$

Erst wenn die gewünschte Menge nicht mehr in der vorhandenen Zeit produziert werden kann, erhöht das Unternehmen die Intensität. Sollen z.B. $x = 80$ Einheiten in $t = 10$ produziert werden, so muss die Intensität erhöht werden. Die Stückkosten erhöhen sich und betragen nun $k(8) = 796$.

Aufgaben

1. Für die Herstellung eines Produkts setzt ein Unternehmen eine Maschine ein. Für die drei benötigten Verbrauchsfaktoren gelten folgende Verbrauchsfunktionen:

$$\begin{aligned} a_1(d) &= 1,5 \cdot d^2 - 3 \cdot d + 2 \\ a_2(d) &= d^2 - 24 \cdot d + 250 \quad \text{(Faktoreneinheiten/Produkteinheit)} \\ a_3(d) &= 2 \cdot d^2 - 24 \cdot d + 75 \end{aligned}$$

Die Intensität der Maschine kann zwischen $d_{\min} = 2$ PE/ZE (Produkteinheiten / Zeiteinheit) und $d_{\max} = 10$ PE/ZE kontinuierlich variiert werden.

a) Bestimmen Sie den Intensitätsbereich der input-effizienten Produktionen.
b) Die Faktorpreise sind

$$\begin{aligned} q_1 &= 10\, GE/FE \\ q_2 &= 12\, GE/FE \quad (Geldeinheiten/FE) \\ q_3 &= 10\, GE/FE \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Stückkostenfunktion in Abhängigkeit der Intensität.
c) Ermitteln Sie die kostenminimale Intensität. Wie hoch sind die minimalen Stückkosten?
d) Das Unternehmen möchte 10 Einheiten des Produkts kostenminimal herstellen. Es gibt keine zeitlichen Restriktionen. Bestimmen Sie die Gesamtkosten, die benötigten Einsatzmengen der Faktoren und die Produktionszeit.
e) Dem Unternehmen steht nun nur eine Zeiteinheit zur Verfügung. Mit welcher Intensität muß es nun produzieren, wenn es weiterhin 10 Einheiten des Produkts herstellen will? Wie verändern sich nun Stückkosten, Gesamtkosten und Faktoreinsatzmengen?

2. Ein Unternehmen stellt auf einer Maschine ein Produkt her. Dazu muß es zwei Verbrauchsfaktoren einsetzen, deren Verbrauch von der Produktionsintensität abhängig ist.

$$\begin{aligned} a_1 &= 90 - 0,6 \cdot d + 0,1 \cdot d^2 \\ a_2 &= 50 - 0,4 \cdot d + 0,02 \cdot d^2 \end{aligned}$$

Die Intensität der Maschine kann zwischen $d_{\text{min}}=2$ und $d_{\text{max}}=4$ kontinuierlich variiert werden. Die Preise der Produktionsfaktoren betragen:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0,15 \\ q_2 &= 0,09 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die kostenminimale Intensität.
b) Wie soll das Unternehmen auf eine steigende Ausbringungsmenge reagieren, wenn es weder zeitlich noch intensitätsmäßig ausgelastet ist?
c) Stellen Sie die Kostenfunktion für den Fall auf, dass das Unternehmen immer kostenminimale Anpassung betreibt.
d) Wie hoch sind die Kosten, wenn das Unternehmen 40 Einheiten produzieren möchte, aber nur 10 Zeiteinheiten zur Verfügung stehen? Welche Anpassungsform muß es nun wählen?

3. Zur Herstellung eines Produkts müssen auf einer Maschine drei Verbrauchsfaktoren eingesetzt werden. Die Verbrauchsfunktionen haben folgende Form

$$\begin{aligned} a_1(d) &= 0,1 \cdot d^2 - 4 \cdot d + 90 \\ a_2(d) &= 0,1 \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45 \\ a_3(d) &= \frac{100}{d} \end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie den Intensitätsbereich der input-effizienten Produktionen.
b) Die Faktorkosten betragen $q_1 = 10$, $q_2 = 5$ und $q_3 = 0$. Ermitteln Sie die Stückkostenfunktion in Abhängigkeit von der Intensität!
c) Ermitteln Sie die kostenminimale Intensität und stellen Sie die dazu gehörende Kostenfunktion auf.
d) Stellen Sie die Faktorverbrauchsfunktionen auf, wenn mit der kostenminimalen Intensität produziert wird.

4. Für die Herstellung eines Produktes werden drei Produktionsfaktoren benötigt, für die folgende Verbrauchsfunktionen gelten:

$$\begin{aligned} a_1(d) &= d^2 - 60 \cdot d + 1225 \\ a_2(d) &= 2 \cdot d^2 - 91 \cdot d + 800 \\ a_3(d) &= 3 \cdot d^2 - 120 \cdot d + 1000 \end{aligned}$$

Die Intensität der Maschine kann zwischen einer Mindestintensität 5 PE/ZE (Produktionseinheiten/Zeiteinheit) und einer Höchstintensität 30 PE/ZE kontinuierlich variiert werden. Die Preise der Produktionsfaktoren sind $q_1 = 20$, $q_2 = 10$ und $q_3 = 15$.
a) Ermitteln Sie den effizienten Bereich der Intensität.
b) Berechen Sie die stückkostenminimale Intensität. Wie hoch sind die minimalen Stückkosten?
c) Das Unternehmen möchte 1000 Einheiten herstellen. Allerdings stehen ihm dafür nur maximal 40 Zeiteinheiten zur Verfügung. Nun überlegt es, ob es die 1000 Einheiten nur auf der vorhandenen Maschine produzieren soll oder ob es eine zusätzliche, identische Maschine für den Betrachtungszeitraum anmieten soll. Die Miete würde 100.000 betragen und es könnten maximal 500 Einheiten auf dieser Maschine produziert werden. Was soll das Unternehmen tun, wenn es die 1000 Einheiten kostenminimal produzieren möchte? Wie hoch sind hierfür die Kosten?

4 Andere statisch-deterministische Ein-Produkt-Produktionsfunktionen

In der Literatur werden noch zahlreiche weitere Ein-Produkt-Produktionsfunktionen diskutiert. Hier soll nur ein kurzer Überblick erfolgen. Für interessierte Leser sei auf die einschlägige Literatur verwiesen.

CES- Produktionsfunktion

Die CES-Produktionsfunktion wurde 1961 von Arrow et al. entwickelt. Sie ist eine neoklassische, substitutionale Produktionsfunktion. In allgemeiner Form sieht sie wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
x &= \left(c_1 r_1^{-\alpha} + ... + c_I r_I^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\
\text{mit } c_i &> 0, \text{ für } i = 1, ..., I \\
\alpha &> -1, \quad \alpha \neq 0
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Möchte man die Produktionsfunktion graphisch darstellen, so ist es sinnvoll, zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $-1 < \alpha < 0$

Fall 2: $\alpha > 0$

Für den Fall $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_I = konstant$ hat die Produktionsfunktion die Form $x = (c + c_i r_i^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}$, mit $c = \sum_{j=1}^{I} r_j, j \neq i$, deren Verlauf für die Fälle 1 und 2 in Abbildung 40 und 41 skizziert wird.

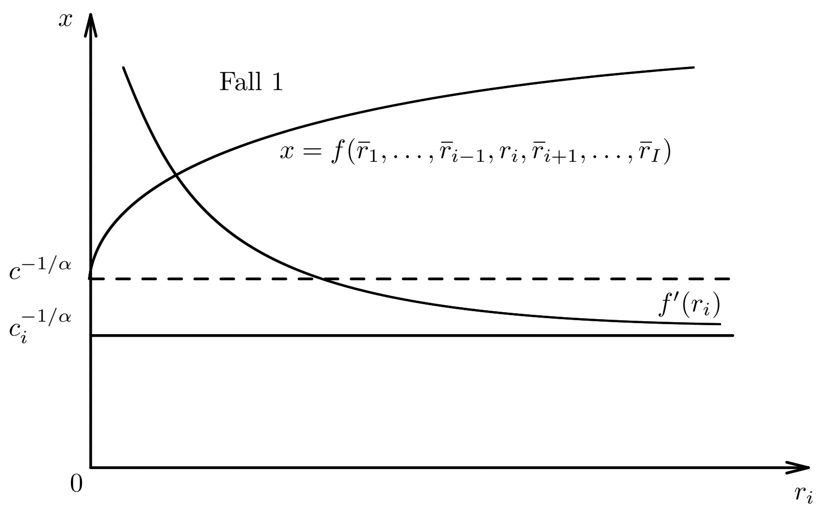

Abbildung 40: CES-Produktionsfunktion bei partieller Faktorvariation - Fall 1

CES steht dabei für **C**onstant **E**lasticity of **S**ubstitution. Dies bedeutet, dass entlang einer Isoquante die Substitutionselastizität konstant ist. Sie beträgt zwischen zwei Faktoren immer $\sigma_{ij} = \frac{1}{1+\alpha}$. Die Substitutionselastizität drückt aus, um wieviel sich das Faktoreinsatzverhältnis prozentual verändert, wenn sich die Grenzrate der Substitution um einen bestimmten Prozentsatz verändert. Formal geschrieben

$$
\sigma_{ij} = \frac{\frac{d\left(\frac{r_i}{r_j}\right)}{\frac{r_i}{r_j}}}{\frac{d\left(\frac{dr_i}{dr_j}\right)}{\frac{dr_i}{dr_j}}} = \frac{d\left(\frac{r_i}{r_j}\right)}{d\left(\frac{dr_i}{dr_j}\right)} \cdot \frac{\frac{dr_i}{dr_j}}{\frac{r_i}{r_j}}
\tag{73}
$$

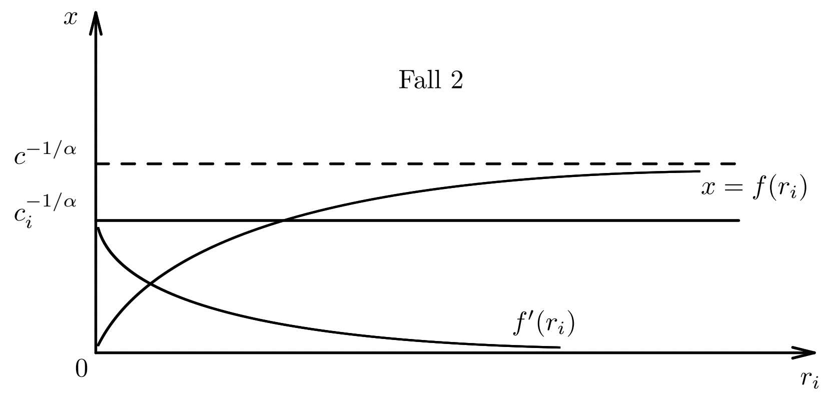

Abbildung 41: CES-Produktionsfunktion bei partieller Faktorvariation - Fall 2

Sie ist ein Maß für die Krümmung einer Isoquante. Je kleiner ihr Wert, desto stärker ist die Isoquante gekrümmt. Für linearlimitationale Produktionsfunktionen ist $\sigma_{ij} = 0$, da es nur ein effizientes Faktoreinsatzverhältnis gibt.

Für α gegen unendlich geht die CES Funktion in eine linearlimitationale Produktionsfunktion über. Für α gegen Null, geht sie in eine Cobb-Douglas Produktionsfunkion über.

Heinen-Produktionsfunktion

Diese Produktionsfunktion wurde 1965 von Edmund Heinen entwickelt. Sie zeichnet sich, ähnlich wie die Gutenberg-Produktionsfunktion, durch eine stärkere Detailierung und ihre betriebswirtschaftliche Ausrichtung aus. Während die Gutenberg-Produktionsfunktion rein limitational ist, kann eine Heinen-Produktionsfunktion auch substitutional sein. Insofern ist der Ansatz von Heinen allgemeiner als der von Gutenberg. Um den Produktionsprozess möglichst genau abzubilden, unterteilt Heinen ihn in Elementarkombinationen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der technisch-physikalischen und der ökonomischen Leistung besteht. Denn während Gutenberg von einem proportionalen Verhältnis zwischen technisch-physikalischer und ökonomischer Leistung ausgeht, erkennt Heinen, dass der Zusammenhang in verschiedenen Phasen, wie Anlauf-, Berabeitungs-, Leer- oder Bremsphase, variiert. Indem man hinreichend kleine Elementarkombinationen wählt, erreicht man wieder einen eindeutigen Zusammenhang. Im folgenden Abschnitt sollen kurz einige Aspekte der Heinen-Produktionsfunktion erläutert werden.

Wie bereits erwähnt, müssen bei einer Heinen-Produktionsfunktion die Elementarkombinationen gewählt werden. Wie man eine Elementarkombination bestimmt, hängt wesentlich vom Erkenntnisinteresse ab. Je kleiner die Elementarkombination ist, desto genauer ist die Produktions- und somit auch die Kostenfunktion. Hat man den Faktorverbrauch einer Elementarkombination bestimmt, so kann man den zu einer bestimmten Ausbringungsmenge gehörenden Faktorverbrauch mit Hilfe der Wiederholungsfunktion ermitteln. Die Wiederholungsfunktion stellt dar, wie oft eine Elementarkombination wiederholt werden muss, um einen bestimmten Output zu erzielen. Nach Heinen gibt es drei Arten von Elementarkombinationen. Bei primären Elementarkombinationen hängt die Anzahl der Wiederholungen direkt von der Ausbringungsmenge ab. Bei sekundären Elementarkombinationen hängt die Anzahl der Wiederholungen nur mittelbar von der Ausbringungsmenge ab. Z.B. sind Anlauf- oder Umrüstvorgänge nicht direkt von der produzierten Menge, sondern von der Anzahl der Lose bzw. Art der produzierten Produkte abhängig. Die Anzahl der Wiederholungen von tertiären Elementarkombinationen ist nicht eindeutig von der Produktionsmenge abhängig. Dazu zählen z. B. Wartungs-, Reinigungs- und Reparaturvorgänge.

Beim Faktorverbrauch unterscheidet Heinen zwischen Repetierfaktoren und Potentialfaktoren. Während Repetierfaktoren direkt oder indirekt im Produktionsprozess verbraucht werden, werden die Potentialfaktoren über einen längeren Zeitraum verzehrt.

Bei den Repetierfaktoren sind die Hilfs- und Werkstoffe direkt von der hergestellten Menge abhängig. Der Verbrauch der Betriebsstoffe ist hingegen nur indirekt davon abhängig. Beeinflusst wird er von drei Gruppen von Einflussgrößen. Zum einem von der z-Situation, welche die technischen Eigenschaften eines Aggregats, die längerfristig konstant sind, beschreibt. Weiter von der u-Situation, welche technische Eigenschaften beschreibt, die von der Zeit abhängen; z. B. die aktuelle Einstellung einer Maschine. Zuletzt hängt der Faktorverbrauch auch von der l-Situation ab, welche die technischen Daten beschreibt, die sich laufend ändern, wie z.B. Druck-, Temperaturverhältnisse oder die dem Aggregat abverlangte technische Leistung. Die wichtigste Einflussgröße ist wie bei Gutenberg die Intensität. Jedoch wird nicht unterstellt, dass sie wie bei Gutenberg konstant ist, sondern dass sie im Zeitablauf variiert. Wichtig zur Bestimmung ist nun die Momentanleistung, die in einem bestimmten Zeitpunkt abgegeben wird. Kann man die technische Leistung, welche über einen Zeitraum abgegeben wird, bestimmen, so kann man daraus über die technische Verbrauchsfunktion die ökonomische Verbrauchsfunktion bestimmen, welche den Zusammenhang zwischen der Ausbringungsmenge pro Zeiteinheit und den dafür eingesetzten Faktormengen beschreibt.

Der Verbrauch der Potentialfaktoren ist direkt kaum messbar. Aus diesem Grund bedient sich Heinen Ersatzgrößen, mit deren Hilfe der Verbrauch gemessen werden soll. Bei den Betriebsmitteln versucht man die Totalkapazität ex ante zu bestimmen und kann dadurch einer Elementarkombination einen bestimmten Verbrauch zuordnen. Allerdings ist die Bestimmung der Totalkapazität ex ante kaum möglich und ist durch Wartung und Reparatur fast beliebig variierbar. Bei den Arbeitskräften ist die Bestimmung des Verbrauch noch problematischer. Als Ersatzgröße wird hier der Arbeitslohn, je nach Lohnart abhängig von der Zeit oder Leistung verwendet.

Hat man den Verbrauch einer Elementarkombination bestimmt, so kann man den Faktorverbrauch bei Produktion einer bestimmten Ausbringungsmenge nun mit Hilfe der Wiederholungsfunktion bestimmen. Bei primären Elementarkombinationen gestaltet sich dies sehr einfach. Man muss nur den Verbrauch pro Elementarkombination mit der Anzahl der benötigten Elementarkombinationen multiplizieren. Da die Anzahl der sekundären Elementarkombinationen nicht direkt von der Ausbringungsmenge abhängt, ist diese Vorgehensweise nicht möglich. Vielmehr unterstellt man, dass ein fester Zusammenhang zwischen den primären und sekundären Elementarkombinationen besteht. So ist jeweils nach einer bestimmten Anzahl an primären Elementarkombinationen ein Beschaffungsvorgang notwendig. Da zwischen tertiären Elementarkombinationen und der Ausbringungsmenge kein Zusammenhang besteht, beschränkt sich die Wiederholungsfunktion hierbei auf die Darstellung der Anzahl der benötigten Elementarkombinationen und somit auf den Faktorverbrauch in Abhängigkeit von der Zeit.

Man sieht, dass durch die Heinen-Produktionsfunktion der Produktionsprozess sehr detailiert abgebildet wird. Durch die Berücksichtigung der zeitlichen Variation der Intensität stellt sie bereits einen Schritt in Richtung dynamische Produktionsfunktion dar. In der Realität wird v.a. die Quanitifizierung der einzelnen Einflußgrößen Probleme bereiten. Zudem ist es fraglich, ob der Aufwand, der betrieben werden muss, ökonomisch gerechtfertigt werden kann.

Engineering Production Functions

Wie auch bei der Gutenberg-Produktionsfunktion werden bei der Engineering Production Function die technischen Produktionsbedingungen explizit berücksichtigt. Die bei der Produktion beteiligten Güter werden nicht nur quantitativ sondern auch durch ihre technischen Eigenschaften charakterisiert. Man unterscheidet bei den Gütern zwischen Verbrauchs-, Gebrauchsfaktoren und Produkten. Den Zusammenhang zwischen dem Verbrauch der Einsatzfaktoren, den technischen Eigenschaften und der Ausbringungsmenge wird durch eine oder mehrere Transformationsfunktionen beschrieben. Auch wird berücksichtigt, dass Energie verbraucht wird. Zum einen wird Energie benötigt, um eine gewünschte Produktmenge zu produzieren, zum anderen benötigt es Energie, welche den Gebrauchsfaktoren zugeführt werden muss. Die Energie, welche den Gebrauchsfaktoren zugeführt werden muss, ist dabei zum einen von der für die Produktionsmenge benötigte Energie und zum anderen von den technischen Eigenschaften der Gebrauchsfaktoren abhängig. Die Engineering Production Function beschreibt nun den Zusammenhang zwischen Ausbringungsmenge, Eigenschaften der eingesetzten Faktoren und der Energie. Die Faktorverbräuche der einzelnen Einsatzfaktoren sind von den technischen Eigenschaften der Einsatzfaktoren und der des Produkts abhängig.

Weiter wird mit der Engineering Production Funktion meist nur ein Partialprozess eines umfassenderen Prozesses beschrieben. Dadurch und durch die Berücksichtigung der technischen Eigenschaften wird ein sehr hoher Detailierungsgrad erreicht.

Anwendungsbeispiele für die Engineering Production Function findet man sowohl für einzelne Aggregate als auch für gesamte Industriezweige. Bei einzelnen Aggregaten sind u.a. der Transport elektrischer Energie, die Elektrolyse, physikalische Grundprozesse wie Destilation oder Filterung und Massentransporte wie Fließ- oder Pumpvorgänge zu erwähnen. Anwendungsbeispiele für

Industriezweige sind u.a. für den Bergbau, die chemische Industrie oder die Transportwirtschaft entwickelt worden.

5 Stochastische und dynamische Erweiterungen von Produktionsfunktionen

In denen bis jetzt vorgestellten Produktionsfunktionen wurden zeitliche Aspekte nicht explizit berücksichtigt. Weiter wurde immer unterstellt, dass alle produktiven Zusammenhänge deterministisch sind. Es ist offensichtlich, dass dies nicht der Realität entspricht. Aus diesem Grund haben verschiedene Autoren neue Produktionsfunktionen entwickelt, welche zeitliche Aspekte bzw. Unsicherheit berücksichtigen oder haben statisch-deterministische Produktionsfunktionen durch Einbeziehung dynamischer und stochastischer Einflüsse erweitert. In diesem Kapitel soll nun erläutert werden, wie dynamische und stochastische Aspekte in der Produktionstheorie berücksichtigt werden.

5.1 Dynamische Aspekte

In den oben beschriebenen Produktionsfunktionen wurde die Zeit meist nicht beachtet. Dies bedeutet nicht, dass die Urheber dieser Produktionsfunktionen den zeitlichen Aspekt negieren. Vielmehr abstrahieren sie von ihm. Andere Autoren wie Gutenberg oder Heinen berücksichtigen bereits einzelne zeitliche Aspekte. So zeigt z.B. Gutenberg, welchen Einfluss die Produktionsdauer auf die Wahl der Intensität und die Anzahl der Maschinen hat. Bei den anderen Autoren kann man sich vorstellen, dass Zeit als ein Einsatzfaktor verstanden wird, der meist nur begrenzt vorhanden ist.

Berücksichtigt man zeitliche Aspekte, so ist es sinnvoll, eine Unterscheidung zwischen lang- und kurzfristigen Aspekten zu machen, da sie verschiedene Auswirkungen haben. Während kurzfristig die Produktionsbedingungen konstant sind, können sie sich langfristig aufgrund technologischen Fortschritts und Lerneffekten verändern. In den nächsten beiden Abschnitten soll erläutert werden, welche lang- und kurzfristige zeitliche Aspekte es gibt und wie diese in der Produktionstheorie berücksichtigt werden.

5.1.1 Kurzfristige zeitliche Aspekte

Hier werden u.a. folgende Aspekte berücksichtigt:
- Aufgrund von Kapazitätsbeschränkungen muss die Produktion zeitlich verteilt werden.
- Es muss die Losgröße und die Art der Weitergabe (offene versus geschlossene Weitergabe) berücksichtigt werden.
- Es muss beachtet werden, dass auf Produktionsstufen am Anfang früher begonnen werden muss als auf solchen am Ende.
- Es muss die Verweilzeit der Güter auf den einzelnen Produktionsstufen berücksichtigt werden.

- Bei Reihenproduktion muss die Reihenfolge der zu bearbeitenden Aufträge festgelegt werden.
- Es muss die zeitliche Entwicklung der Lagerbestände miteinbezogen werden. Dies kann mit Hilfe der Lagerbilanzgleichung geschehen.

$$y_t = y_{t-1} + x_t - d_t \tag{74}$$

Die Gleichung besagt, dass der Lagerbestand y_t sich aus dem Lagerbestand der Vorperiode y_{t-1} zuzüglich der in t produzierten Menge x_t und abzüglich des Lagerabgangs in d_t ergibt.

Produktionsfunktionen, welche diese zeitliche Apekte berücksichtigen, wurden u.a. von Küppers und Matthes entwickelt. Zunächst soll kurz die dynamische Produktionsfunktion von Küppers dargestellt werden.

Dynamische Produktionsfunktion von Küppers

Die dynamische Produktionsfunktion von Küppers basiert auf einer Leontief-Produktionsfunktion. Jedoch können auch andere produktive Zusammenhänge berücksichtigt werden. Küppers unterteilt den Planungshorizont in gleich lange Teilperioden. Wie man die Dauer einer Teilperiode wählt, hängt von dem konkreten Produktionsprozess ab, den man beschreiben möchte. Jede beteiligte Güterart wird mit einem Periodenindex versehen. Man spricht auch von einem Produktionsmengenmodell. Die Grundgleichung hat folgende Form:

$$\begin{aligned} y_1^t &= y_{11}^t + ... + y_{1n}^t + x_1^t + l_1^t - l_1^{t-1} \\ &. \\ &. \\ &. \\ y_n^t &= y_{n1}^t + ... + y_{nn}^t + x_n^t + l_n^t - l_n^{t-1} \end{aligned} \tag{75}$$

Die Gleichungen besagen, dass die produzierte Menge eines Gutes y_i^t in t sich aus den in den Produktionsstufen $i = 1, ..n$ benötigten Mengen des Gutes i, der Endnachfrage nach diesem Gut x_i^t und der Lagerbestandsveränderung $l_i^t - l_i^{t-1}$ ergibt.

Die Dauer eines Produktionsschrittes wird in der Transformationsgleichung berücksichtigt.

$$y_{ij}^t = f_{ij}^\theta (...) \cdot y_j^{t+\theta} \tag{76}$$

Die Transformationsfunktion gibt an, wieviel von y_{ij} in t benötigt wird, um in $t + \theta$ y_j Einheiten zu erhalten. Dabei ist θ die Dauer des Teilprozesses bzw. die Verweildauer auf dieser Produktionsstufe.

Berücksichtigt man, dass y_{ij} in verschiedenen Teilprozessen unterschiedlicher Dauer eingesetzt wird, so ergibt sich die benötigte Menge wie folgt:

$$y_{ij}^t = \sum_{\tau=0}^{\theta} f_{ij}^\tau (...) \cdot y_j^{t+\tau} \tag{77}$$

Die insgesamt benötigte Menge des Gutes i in t ergibt sich dann aus der Summe der in allen Produktionsstellen benötigten Mengen y_{ij}, $j = 1, .., n$.

$$y_i^t = \sum_{\tau=1}^{\theta} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{\tau}(...) \cdot y_j^{t+\tau} + x_i^t + l_i^t - l_i^{t-1}, \qquad i = 1, .., n \tag{78}$$

Die dynamische Produktionsfunktion erhält man nun, indem man diesen Zusammenhang für jedes Gut und jede Periode darstellt und dabei berücksichtigt, dass die Güterverbräuche der verschiedenen Perioden voneinander über den Lagerbestand abhängen. Aufgrund der formalen Komplexität soll hier auf eine exakte Darstellung der Produktionsfunktion verzichtet werden. (Man sieht, dass bereits für wenige Güterarten und Perioden die Produktionsfunktion sehr umfangreich wird.) Dies spiegelt den Rechenaufwand wider, der notwendig ist, um z.B. den kostenminimalen Zeitpfad zu berechnen.

Der Ansatz von Küpper kann an verschiedenen Stellen noch erweitert werden. So können produktionswirtschaftliche Tatbestände wie Intensitätsgrad, Leistung einer Produktionsanlage oder die Bearbeitungsreihenfolge berücksichtigt werden. Auch kann man Interdependenzen zwischen der Produktion und der Aufbauorganisation des Fertigungsbereichs, wie der räumlichen Anordnung der Fertigungsanlagen, oder die Prozessstrukturen abbilden.

Dynamische Produktionsfunktion von Matthes

Eine weitere kurzfristige dynamische Produktionsfunktion wurde von Matthes ebenfalls 1979 entwickelt. Er versuchte zusätzlich auch strukturelle, finanzielle, prozesstechnische und soziale Nebenbedingungen miteinzubeziehen. Sein Modell baut auf dem von Küpper auf und enthält folgende Erweiterungen.

Statt Teilperioden und die zugehörigen aggregierten Produktionsmengen zu betrachten, verwendet Matthes nun datierte Mengen, was es ihm ermöglicht, den Produktionsablauf wesentlich exakter abzubilden. Weiter erfasst er jeden Vorgang als Projekt und bildet ihn mit Hilfe eines Metra-Potential-Netzplans ab. Als Projekt definiert er dabei die Erzeugung einer Einheit eines bestimmten Endprodukts. Durch die Netzplanstruktur gelingt es ihm ebenfalls den Finanzbereich mit den kurzfristigen Ein- und Auszahlungen und deren Beziehungen zum Produktionsbereich darzustellen. Aufgrund des großen Umfangs soll auf den Aufbau dieses Modells hier nicht näher eingegangen werden.

5.1.2 Langfristige zeitliche Aspekte

Bei den langfristigen dynamischen Produktionsfunktionen steht die Entwicklung der Produktionsbedingungen und der eingesetzten Produktionstechnologie in Abhängigkeit von der sich im Zeitablauf verändernden Rahmenbedingungen im Vordergrund. Die Produktionsmöglichkeiten sind nun nicht mehr gegeben, sondern verändern sich im Zeitablauf. Vor allem technischer Fortschritt bedingt die Notwendigkeit einer dynamischen Produktionsfunktion. Fandel zeigt, wie es möglich ist in traditionellen Produktionsfunktionen wie der Leontief- oder

Gutenberg-Produktionsfunktion technischen Fortschritt zu berücksichtigen. Eine Sonderform des technischen Fortschritts sind Lernprozesse. Diese beinhalten keine technischen Neuerungen sondern spiegeln die Tatsache wider, dass Arbeiter eine Tätigkeit mit zunehmender Übung effektiver ausüben. Bereits 1936 wurde von Wright festgestellt, dass bei einer Verdoppelung der kummulierten Produktionsmenge die Stückkosten um einen konstanten Prozentsatz, der sogenannten Lernrate, sinken. Vor allem zu Beginn der Produktion hat dies einen erheblichen Einfluss auf die Produktionskoeffizienten. Wie dies in einer Produktionsfunktion berücksichtigt werden kann, wird ebenfalls bei Fandel gezeigt.

Auch wenn kein technischer Fortschritt vorliegt, kann sich das Faktoreinsatzverhältnis ändern. Der Grund liegt dabei meist in einer Veränderung der Faktorpreisverhältnisse. Relativ teurer gewordene Faktoren werden dabei durch billigere Faktoren teilweise substituiert. In der Praxis kann man z.B. beobachten, dass mit Hilfe zunehmender Automatisierung Arbeitskräfte durch Maschinen substituiert werden.

Der Tatsache, dass das Ausmaß der Substitutionalität zwischen Faktoren vom Zeitpunkt der Betrachtung abhängt, wird in dem putty-clay (Lehm-Ton) Modell Rechnung getragen. Dabei wird zwischen einer ex-ante und einer ex-post Produktionsfunktion unterschieden. Als ex-ante wird dabei der Zeitpunkt vor der Installation einer Produktionsanlage verstanden. Hier bildet die Produktionsfunktion die möglichen Ausgestaltungen der Produktionsanlage und der damit verbundenen Faktoreinsatzmengen in Abhängigkeit von dem technischen Fortschritt im Installationszeitpunkt ab. Ex-post also nach der Installation der Produktionsanlage sind die Substitutionsmöglichkeiten nur noch beschränkt möglich. Dies wird durch die ex-post-Produktionsfunktion abgebildet. Die ex-ante-Produktionsfunktion wird im putty-clay-Modell dabei durch eine neoklassische Produktionsfunktion der folgenden Form abgebildet:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0(\tau) \cdot r_1^{\alpha_1} \cdot .... \cdot r_I^{\alpha_I} \qquad (79) \\ \text{mit } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i &\leq 1 \end{aligned}$$

Der technische Fortschritt kommt dabei durch die Fortschrittsfunktion $\alpha_0(\tau)$ zum Ausdruck, welche die Abhängigkeit des Niveaufaktors vom Installationszeitpunkt erfasst. Ex-ante wird die Technologie gewählt, bei welcher die Faktoren so eingesetzt werden, dass das Kostenoptimum erreicht wird. Die Faktorpreise ergeben sich dabei bei den Werkstoffen und den Arbeitskräften aus den aktuellen Marktpreisen und bei den Betriebsmitteln aus den Abschreibungsbeträgen, die sich bei voraussichtlicher Nutzungsdauer ergeben. Eine kontinuierliche Substitution wird dabei in der Praxis nicht möglich sein, da nur eine begrenzte Anzahl an Produktionsanlagen am Markt erhältlich ist, die zwar unterschiedliche jedoch diskrete Faktoreinsatzmengenverhältnisse aufweisen.

Hat man sich für eine Produktionsanlage entschieden, so hat man nun nur noch sehr begrenzte Substitutionsmöglichkeiten. Dies wird durch die ex-post-Produktionsfunktion dargestellt. Im Extremfall ist nur noch ein Produktionsprozess ausführbar und man erhält somit eine limitationale Produktionsfunktion. Oft sind jedoch mit einer Produktionsanlage mehrere Produktionsprozesse ausführbar bzw. kann die Produktionsgeschwindigkeit variiert werden. Dann erhält man wieder eine substitutionale Produktionsfunktion. Allerdings werden Produktionsanlagen meist nicht auf einmal angeschafft bzw. im Zeitablauf erneuert. Mit der Anschaffung eines neuen Aggregats verändert sich jedesmal die Technologiemenge.

5.2 Stochastische Aspekte

5.2.1 Berücksichtigung von Unsicherheit in der Produktionstheorie

Bis jetzt wurde immer angenommen, dass ein sicherer Zusammenhang zwischen Input und Output besteht. Es wird in der Praxis jedoch oft beobachtet, dass der Output selbst bei gleichen Produktionsbedingungen und Inputmengen im Zeitablauf schwankt. Der Grund dafür sind zufallsbedingte Einflüsse, sogenannte Störeinflussgrößen, wie wechselnde Klimabedingungen in der Landwirtschaft, schwankende Arbeitseffizienz, unterschiedliche Qualität der Einsatzfaktoren oder aber auch nicht exaktes Funktionieren der Betriebsmittel. Dieser Tatbestand wird durch eine Stochastisierung der Produktionsfunktion berücksichtigt. Es gibt zwei Möglichkeiten, die Unsicherheit in die Produktionsfunktion einfließen zu lassen.

Die erste Möglichkeit ist, den Output nicht mehr als deterministische Größe x sondern als Zufallsvariable X darzustellen. Nimmt man an, dass die Störeinflussgröße normalverteilt ist mit dem Erwartungswert Null, so ist der Output ebenfalls normalverteilt mit einem Erwartungswert x. Somit kann man die stochastische Produktionsfunktion in eine deterministische überführen.

Bei der zweiten Möglichkeit wird die Unsicherheit in den Produktionskoeffizienten berücksichtigt. Diese sind nun nicht mehr sicher sondern Zufallsvariablen. Dies führt dazu, dass der Output ebenfalls stochastisch ist. Die Störeinflüsse können entweder durch eine additive oder durch eine multiplikative Störgröße U in einer Produktionsfunktion berücksichtigt werden. Als Bsp. für eine multiplikative Verknüpfung sei folgende Cobb-Douglas-Produktionsfunktion angeführt:

$$X = \alpha_0 \cdot r_1^{\alpha_1} ... r_I^{\alpha_I} \cdot e^U \tag{80}$$

Hierbei ist e die Basis des natürlichen Logarithmus und U die Störgröße.

Wählt man die zweite Möglichkeit der Stochastisierung, so kann man näherungsweise die Verteilung der Produktionskoeffizienten ermitteln. Dafür muss man über einen genügend langen Zeitraum die Output- und die zugehörigen Inputmengen erfassen. Dividiert man die Outputmengen durch die Inputmengen der jeweiligen Einsatzfaktoren, so erhält man die Produktionskoeffizienten. Ordnet man die Koeffizienten Intervallen gleicher Breite zu und stellt die Belegung der einzelnen Intervalle als Histogramm dar, so erhält man näherungsweise die Verteilung der Koeffizienten. Man hat festgestellt, dass die Schwankungen je nach Branche recht unterschiedlich sind. Vor allem dort, wo bereits geringe Änderungen in der Qualität der Einsatzfaktoren große Einflüsse auf die Produktionsgüte haben, hat man stark schwankende Produktionskoeffizienten beobachtet.

Wählt man die erste Möglichkeit der Stochastisierung der Produktionsfunktion, dann hat eine auf dem Ertragsgesetz basierende Produktionsfunktion die in Abbildung 42 dargestellte Form. Dabei wird angenommen, dass die Störgröße normalverteilt sei.

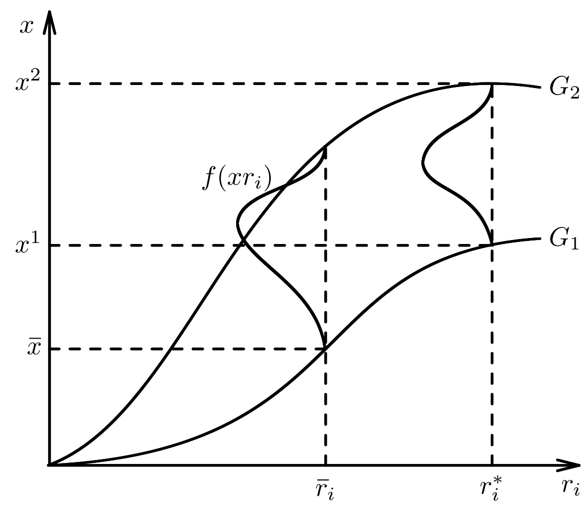

Abbildung 42: Stochastisch ertragsgesetzliche Produktionsfunktion bei partieller Faktorvariation

6 Mehr-Produkt-Unternehmen

6.1 Einleitung

Nahezu alle Unternehmen sind Mehr-Produkt-Unternehmen (kurz: MPUs genannt). Die traditionellen Lehrbücher zur Produktions-und Kostentheorie tragen diesem Tatbestand kaum Rechnung. In diesem Abschnitt soll diese Lücke ein gutes Stück geschlossen werden. Es wird zunächst der Frage nachgegangen, warum es überhaupt MPUs gibt. Anschließend konzentriert sich die Analyse zunächst auf die traditionelle Sichtweise der Mehrproduktproduktion. Danach folgt die moderne Sichtweise, die von der Existenz von Komplementaritäten ausgeht.

Warum produzieren und vertreiben Unternehmen mehr als ein Produkt? In Anlehnung an Ronald Coase, der die Frage nach der Existenz von Unternehmen stellte, kann geantwortet werden: Es muss Gründe geben, die ein Unternehmen veranlassen, ein Produktportfolio anzubieten, das mindestens gleiche Marktchancen besitzt, wie vergleichbare Produkte von Ein-Produkt-Unternehmen. In der modernen Produktionstheorie werden als Gründe Kosten-, Ertrags- und Wettbewerbsvorteile genannt. Im Kern handelt es sich um Komplementaritäten, die durch die vorhandenen Produktionsfaktoren in MPUs zur Entfaltung gelangen können und dem Unternehmen Vorteile unterschiedlicher Ausprägung bescheren können. Weiter unten wird auf die Eigenschaften von Komplementaritäten ausführlich eingegangen

In einigen Standardlehrbüchern werden bei der Mehrproduktproduktion zwei Fälle unterschieden: *Die unverbundene und die verbundene Produktion.* Bei der **unverbundenen Produktion** werden die Produkte jeweils unabhängig voneinander hergestellt. Es gibt kein Allokationsproblem zwischen den verfügbaren Kapazitäten der Produktionsfaktoren. Jedes Produkt besitzt seinen eigenen Inputvektor. Dadurch handelt es sich um voneinander unabhängige Produktionseinheiten, so dass es Gründe geben muss, die außerhalb des Produktionsbereichs liegen, die die Existenz dieses MPUs rechtfertigen. Es ist unmittelbar einsichtig, dass es schwerfällt, realistische Beispiele für die unverbundene Produktion zu finden. Definiert man den Produktionsbereich eng genug, dann lassen sich solche Beispiele konstruieren.

Beispiel 1: *Zur Herstellung von zwei Produkten werden zwei produktspezifische Anlagen benötigt. Die maximal herstellbare Menge der beiden Produkte hängt nur von den Kapazitäten der eingesetzten Produktionsfaktoren ab. Beide Produkte besitzen ihren produktspezifischen, voneinander unabhängigen Inputvektor.*

Beispiel 2: *Die meisten Bierbrauereien bieten neben verschiedenen Biersorten auch alkoholfreie Getränke an. Nun kann man vereinfachend sagen, dass Brauereien mit den Produkten Bier und Mineralwasser Zwei-Produkt-Unternehmen sind. Der Produktionsprozess der beiden Produkte ist -was unmittelbar einleuchtet-voneinander unabhängig. Dies betrifft nicht nur die eigentliche Herstellung sondern auch die Abfüllung der Getränke. Trotz dieser weitgehenden Unabhängigkeit* *kann nicht von reiner unverbundener Produktion ausgegangen werden, weil einige Produktionsfaktoren (bspw. Arbeitskräfte) gemeinsam genutzt werden.*

Realistischer ist der Fall der **verbundenen Produktion**. Zur Herstellung mehrerer Produkte wird mindestens ein Produktionsfaktor gemeinsam genutzt. Dadurch entsteht bei begrenzter Verfügbarkeit der Produktionsfaktoren ein Tradeoff-Problem, wonach die Erhöhung der Ausbringungsmenge des Produktes i zur Reduzierung der maximalen Ausbringungsmenge des Produktes $j(i \neq j)$ führt. Ein Spezialfall ist die sog. **Kuppelproduktion**. Im Produktionsprozess entstehen immer mehrere Produkte, unabhängig davon, welches Produkt das Unternehmen ursprünglich beabsichtigte herzustellen.

Beispiel 3: *Zur Gaserzeugung aus Kohle fällt im Produktionsprozess neben Gas auch Koks an, so dass Gaserzeuger auch Koks vertreiben.*

Beispiel 4: *Bei der Erzeugung von Kraftstoffen aus Rohöl fallen als Nebenprodukte Fette und Öle an, die die Mineralölunternehmen in ihr Produktportfolio aufnehmen.*

6.2 Verbundene Produktion ohne Komplementaritäten

Die verbundene Produktion ist der typische Fall der Mehrproduktproduktion. Zunächst soll die traditionelle Sichtweise vorgestellt werden, bei der der substitutive Charakter der eingesetzten Produktionsfaktoren im Vordergrund steht und nicht die Komplementarität zwischen den Produkten.

Gehen wir wie im Ein-Produkt-Fall davon aus, dass ein Unternehmen eine Produktionstechnologie gewählt hat, die durch die Technologiemenge T beschrieben werden kann und die verfügbare Input-Output-Kombination wiedergibt. Es sei $\mathbf{r}$ der Vektor für verfügbaren Produktionsfaktoren und $\mathbf{x}$ der Vektor für das Produktportfolio, das aus der herstellbaren Menge $M = (1, 2, ..., m)$ gewählt wurde. Im Ein-Produkt-Fall kann die Technologiemenge mit der Produktionsfunktion direkt in Verbindung gebracht werden und zwar durch $T = \{(\mathbf{r}, x) : x \leq f(\mathbf{r})\}$. Im Mehr-Produkt-Fall wird die Technologiemenge wie folgt definiert:

Definition 1: $T = \{(\mathbf{r}, \mathbf{x}) : \mathbf{x}$ kann mit $\mathbf{r}$ produziert werden$\}$.

An die so definierte Technologiemenge werden üblicherweise einige Bedingungen geknüpft und zwar unter anderem, dass eine kontinuierliche Transformationsfunktion der Form $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \geq 0$ existiert, so dass positive Mengen der Produktionsfaktoren positive Produktmengen ergeben, wenn $(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \in T$.[2] Die Transformationsfunktion representiert den Kombinationsprozess im Mehr-Produkt-Fall durch die Menge der Input/Output-Kombinationen und -wie wir bereits gesehen haben- im Ein-Produkt-Fall bei gegebener Produktionsfunktion $x = f(\mathbf{r})$ durch $\varphi(\mathbf{r}, x) = f(\mathbf{r}) - x$.

[2] Zu den weiteren Bedingungen vgl. Chambers [2].

Betrachten wir nun den Kombinationsprozess für n Produktionsfaktoren zur Herstellung von m Produkten, dann ergibt sich als **Faktorbedarfsfunktion** für $i = 1, ..., n$:

$$r_i = a_{i1}(x_1) \cdot x_1 + a_{i2}(x_2) \cdot x_2 + ... + a_{im}(x_m) \cdot x_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x_j) \cdot x_j, \quad (81)$$

und bei konstanten Produktionskoeffizienten $a_{ij}(x_j) = a_{ij}$

$$r_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + ... + a_{im} \cdot x_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \quad (82)$$

Bei gegebenen Kapazitäten der Produktionfaktoren lässt sich unmittelbar die faktorspezifische **Isoeinsatzkurve** als der geometrische Ort alternativer Produktmengenkombinationen $(x_1, ..., x_m)$ ermitteln. Und die **Grenzrate der Produktsubstitution** zeigt uns bekanntlich an, um wieviel die Produktion von x_j eingeschränkt werden muss, wenn $x_{k,(j \neq k)}$ um eine infinitesimal kleine Mengeneinheit erhöht werden soll. Ausgewählt wird diejenige $(x_1, ..., x_m)$ Kombination, die den Zielvorgaben des Entscheidungsträgers optimal entspricht. Unterstellen wir Gewinnmaximierungstreben des Managements, dann wird die optimale Produktmengenkombination durch die Lösung des folgenden **Optimierungsproblems** gefunden:

$$\max_{x_j} \Pi = \sum_{j=1}^{m} d_j \cdot x_j \quad (83)$$

unter der Nebenbedingung:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j = r_i \text{ für alle } i \text{ Produktionsfaktoren } (i = 1, ..., n),$$

wobei d_j der Deckungungsbeitrag des j-ten Produkts darstellt. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems erfolgt mit gängigen Methoden der linearen Programmierung, die inzwischen in vielen quantitativen Computer-Softwarepaketen enthalten sind.

Beispiel 6: *Anhand eines einfachen Beispiels soll der Optimierungsprozess illustriert werden. Angenommen es werden drei Produktionsfaktoren zur Herstellung von zwei Produkten benötigt. Von den Produktionsfaktoren sind folgende Mengen verfügbar:* $r_1 = 80$, $r_2 = 110$, $r_3 = 160$. *Weiterhin werden folgende konstante Produktionskoeffizienten unterstellt:* $a_{11} = 2$, $a_{12} = \frac{1}{4}$, $a_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{22} = 1$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = 1$. *Und schließlich seien die Deckungsbeiträge der beiden Produkte* $d_1 = 4$ *und* $d_2 = 3$. *Das Optimierungsproblem kann nun folgendermaßen beschrieben werden:*

$$\begin{aligned} &\max \Pi = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen:} \quad &2x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \leq 80 \\ &\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 110 \\ &3x_1 + x_2 \leq 160 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Da es sich in diesem Beispiel nur um ein Zwei-Produkt-Optimierungsproblem handelt, können wir es auch graphisch darstellen.

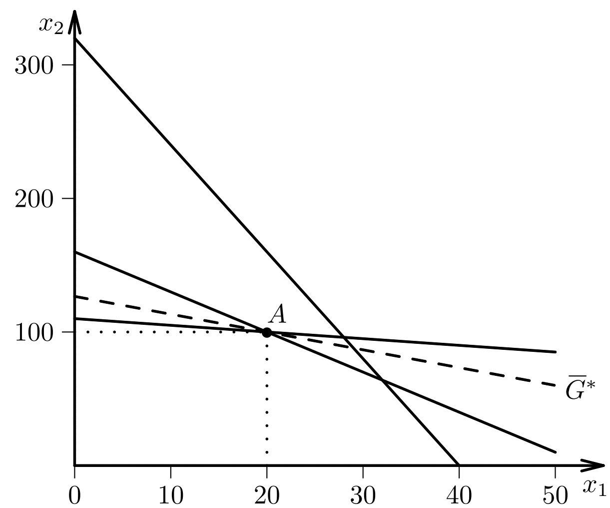

Abbildung 43: Ermittlung des Gewinnmaximums im Mehrproduktfall

Aus Abbildung 43 wird ersichtlich, dass die Isoeinsatzkurven einen Lösungsraum begrenzen, der der Technologiemenge der Produktionsmöglichkeiten entspricht. Die effizienten Produktionsmöglickeiten werden durch die Isoeinsatzkurve be-
schrieben. Im Sinne der Zielvorgaben wird diejenige Produktionskombination (x_1^*, x_2^*) *gewählt, die die maximale Deckungsbeitragssumme ergibt. Geometrisch findet man in Abbildung 43 die optimale Produktionskombination durch das Verschieben der Iso-Deckungsbeitragslinie nach rechts oben. Im Punkt A erhalten wir den maximalen Deckungsbeitrag unter den gegebenen Produktionsmöglichkeiten und werden somit die Mengen* $x_1^* = 20$ *und* $x_2^* = 100$ *herstellen.*

6.3 Verbundene Produktion mit Komplementaritäten

Bereits in den frühen Schriften der Nationalökonomie wird die Existenz von Mehr-Produkt-Unternehmen durch vorhandene Komplementaritäten (economies of scope) erklärt. Beispielweise führt Hicks [7] aus: *"... almost every firm does produce a considerable range of different products. It does so largely because there are economies to be got from producing them together, and these economies consist largely in the fact that the different products require much the same* *overhead."* (S. 372). Die verbundene Produktion muss demnach mit Vorteilen verbunden sein, die nur im Mehrprodukt-Fall auftreten können und voraussetzen, dass mindestens ein Produktionsfaktor gemeinsam genutzt werden kann. Ergeben sich durch die verbundene Produktion Kostenvorteile, dann spricht man von **Kostenkomplementarität**. In diesem Sinne ist es kostengünstiger, mehrere Produkte gemeinsam und nicht getrennt herzustellen. Die gemeinsame Produktion (joint production) kann in einem Mehr-Produkt-Unternehmen oder im Verbund mit anderen Unternehmen (strategische Allianzen) erfolgen.

Angenommen $M = (1, ..., m)$ sei die Menge der herstellbaren Produkte, S eine Untermenge von M, $(S \subset M)$, und $P = (T_1, ..., T_k)$ eine nichttriviale Partition der Menge S $(\cup_j T_j = S,\ T_j \cap T_{k(j \neq k)} = \emptyset)$. Dann ergeben sich bei der Produktion aus der Produktmenge S bei der Partition P und dem Produktvektor $\mathbf{x}_S$ Komplementaritätsvorteile (economies of scope, auch Verbundvorteile genannt) falls bei gegebenen Faktorpreisen folgendes erfüllt ist:

$$\sum_{j=1}^{k} C(x_{T_j}) > C(x_S). \tag{84}$$

Das Ausmaß der Verbundvorteile beim Produktvektor $\mathbf{x}$ für die Produktmenge T ergibt sich dann wie folgt:

$$V_T(\mathbf{x}) = \frac{C(\mathbf{x}_T) + C(\mathbf{x}_{M-T}) - C(\mathbf{x})}{C(\mathbf{x})}. \tag{85}$$

Es misst den prozentualen Anstieg der Produktionskosten, wenn die Produktion in separaten Produktionseinheiten T und $M - T$ aufgeteilt wird, so dass Produktionsfaktoren nicht gemeinsam genutzt werden können. Spaltet man das Mehr-Produkt-Unternehmen in unterschiedliche Produktioneinheiten auf, dann steigen, fallen oder die Gesamtproduktionskosten bleiben unverändert, je nach dem, ob $V_T(\mathbf{x})$ größer, kleiner oder gleich Null ist.

Beispiel 7: *Die Bedingung für die Existenz von Verbundvorteilen kann am Beispiel von zwei Produkten folgendermaßen gezeigt werden:*

$$C(x_1, 0) + C(0, x_2) > C(x_1, x_2). \tag{86}$$

Gleichung (86) soll zeigen, dass die Summe der Produktionskosten bei unabhängiger Produktion größer ist als die Produktionskosten beider Produkte in einer Organisation. Graphisch lässt sich dieser Zusammenhang ebenfalls einfach zeigen. In Abbildung 44 liegt der Punkt A unterhalb der schraffierten Hyperebene, wodurch die Produktionskosten des Zwei-Produkt-Unternehmens geringer sind als die Summe der Kosten der beiden Ein-Produkt-Unternehmen. Das Ausmaß der Verbundvorteile für $m = 2$ ergibt sich dann aus:

$$V(x_1, x_2) = \frac{C(x_1, 0) + C(0, x_2) - C(x_1, x_2)}{C(x_1, x_2)} \gtreqless 0. \tag{87}$$

Falls $V(x) > 0$ spricht man von Verbundvorteilen (teilweise auch von positiven Synergieeffekten), bei $V(x) < 0$ von Verbundnachteilen. Bei $V(x) = 0$ sind keine

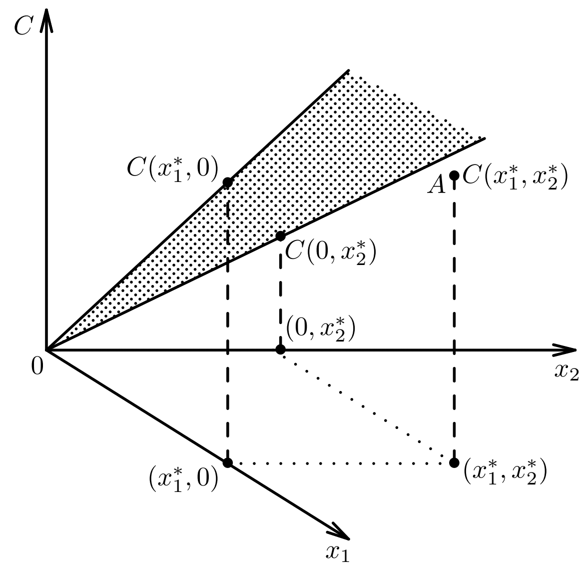

Abbildung 44: Komplementaritätsvorteile im Zwei-Produktfall (Quelle: Baumol et al. (82), S. 72)

Komplementaritätsvorteile vorhanden, so dass ein Mehr-Produkt-Unternehmen keine Wettbewerbsvorteile gegenüber Ein-Produkt-Unternehmen besitzt.

Komplementaritätsvorteile lassen sich auf die gemeinsame Nutzung von mindestens einem Produktionsfaktor zurückführen. Häufig wird die menschliche Arbeitskraft als Beispiel für ihre universelle Verwendung im Produktionsprozess genannt. Dies schließt den dispositiven Faktor mit ein, denn Managementfähigkeiten lassen sich durchaus auf andere Tätigkeitsfelder übertragen. Die Praxis zeigt jedoch, dass Manager sich branchenspezifische Fähigkeiten aneignen und die Arbeitsmobilität weitgehend auf diese Branche beschränkt bleibt. Neben der menschlichen Arbeitskraft besitzen neue Technologien das Potential für die Mehr-Produkt-Produktion ohne zusätzliche Kosten eingesetzt zu werden. Als Beispiel eignen sich numerisch gesteuerte Maschinen im Werkzeugmaschinenbau (sog. NC-gesteuerte Maschinen), die die Flexibilisierung im Produktionsbereich enorm gesteigert haben, so dass die neuen Technologien die Komplementaritätsvorteile im Zeitablauf erhöht haben. Komplementaritätsvorteile setzen die Existenz von **Subadditivität** voraus.

Definition 2: *Eine Kostenfunktion $C(\mathbf{x})$ heißt **subadditiv** bei $\mathbf{x}$, falls alle beliebigen Mengen von Produktvektoren $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^j \neq \mathbf{x}, j = 1, ..., k$, so dass $\sum_{j=1}^{k} \mathbf{x}^j = \mathbf{x}$ und $C(\mathbf{x}) < \sum_{j=1}^{k} C(\mathbf{x}^j)$ ist.*

Subadditivität und letztlich auch die Existenz von Komplementaritätvorteilen setzt die Kenntnis der Kostenfunktion insbesondere bei geringen Produktionsmengen voraus. Denn nur über diese Kosteninformationen kann die Vorteilhaftigkeit der Mehr-Produkt-Fertigung gegenüber der Ein-Produkt-Fertigung beurteilt werden. Demnach muss bekannt sein, ob $C(\mathbf{x}^*)$ für alle $\mathbf{x}^* \leq \mathbf{x}$ gilt. Ist die Kostenfunktion **querstrahlkonvex**, dann können Komplementaritätsvorteile erzielt werden.

Definition 3: *Eine Kostenfunktion $C(\mathbf{x})$ heißt **querstrahlkonvex**, wenn bei zwei beliebigen Produktvektoren $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ folgendes gilt:*

$$C\left[\alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2\right] \leq \alpha C(\mathbf{x}^1) + (1-\alpha)C(\mathbf{x}^2), \tag{88}$$

wobei α Werte zwischen $0 < \alpha < 1$ annehmen kann.

Beispiel 8: *Die Querstrahlkonvexität kann für den Zwei-Produkt-Fall in Abb. 45 einfach verdeutlicht werden. Auf dem Querstrahl $\mathbf{x}^*$ werden die beiden Produktvektoren $\mathbf{x}^a$ und $\mathbf{x}^b$ gewählt. Dabei ist $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}^a, \mathbf{x}^b) = \alpha\mathbf{x}^a + (1-\alpha)\mathbf{x}^b$, wobei $\mathbf{x}^a = (x_1^a, 0)$ und $\mathbf{x}^b = (0, x_2^b)$ ist. Entsprechend Gleichung (87) muss folgendes gelten:*

$$C(\mathbf{x}^*) \leq \alpha C(x^a) + (1-\alpha)C(x^b). \tag{89}$$

Demnach müssen die Kosten des Zwei-Produkt-Unternehmens geringer sein als die Gesamtkosten bei spezialisierter Produktion.

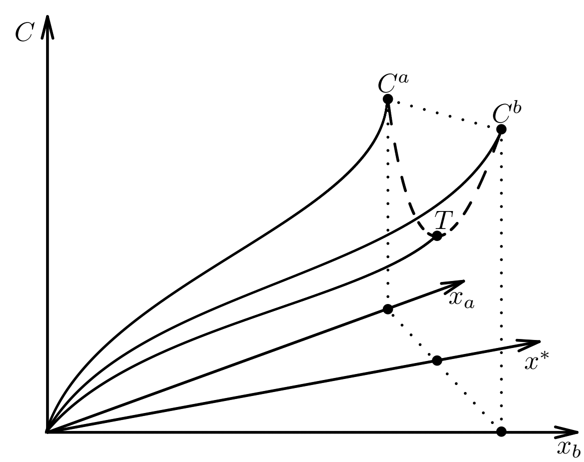

Abbildung 45: Strahlendurchschnittskosten (Quelle: Baumol (82), S. 10)

Im Mehr-Produkt-Fall kann die übliche Definition der Durchschnittskosten nicht verwendet werden. Statt dessen betrachtet man sog. **Strahlendurchschnittskosten**, die den Kostenverlauf auf einem Strahl oder Schnitt parallel oder quer zu den Achsen beschreiben. Auf einem Strahl liegen alle Produktkombinationen, die verschiedene Produktmengen in den gleichen Proportionen enthalten. Die Strahlendurchschnittskosten (SDK) sind wie folgt definiert:

$$SDK(\mathbf{x}) = \frac{C(\mathbf{x})}{\beta \cdot \mathbf{x}} \text{ für } \beta > 0. \tag{90}$$

Die SDK sind fallend (steigend) bei $\mathbf{x}$, wenn $SDK(t \cdot \mathbf{x})$ eine steigende (fallende) Funktion eines Skalars t bei $t = 1$ ist. Die SDK erreichen ihr Minimum bei $\mathbf{x}$, wenn $SDK(\mathbf{x}) < SDK(t \cdot \mathbf{x})$ für alle positive $t \neq 1$ ist. Steigende (fallende) SDK haben fallende (steigende) Skalenerträge zur Folge. Dabei werden **globale Skalenerträge** der Produktmenge M durch:

$$S_M(\mathbf{x}) = \frac{C(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{m} \mathbf{x}_j C_j(\mathbf{x})} \tag{91}$$

definiert, wobei $C_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j}$ ist. Die Skalenerträge sind steigend, fallend oder konstant falls $S_M > 1$, $S_M < 1$ oder $S_M = 1$.

Durch einen Schnitt durch das Kostengebirge parallel zu einer Produktachse lassen sich **produktspezifische Kostenbetrachtungen** vornehmen. Die produktspezifischen Kosten eines Produktes j beim Produktvektor $\mathbf{x}$ ergeben sich aus:

$$PK_j(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x}_{M-j}) \tag{92}$$

bei $M = (1, ..., m)$ und $\mathbf{x}_{M-j} = (x_1, ..., 0, ..., x_m)$. Die produktspezifischen Durchschnittskosten des Produktes j werden wie folgt definiert:

$$PDK_j(\mathbf{x}) = \frac{PK_j(\mathbf{x})}{x_j}. \tag{93}$$

Und die produktspezifischen Skalenerträge des Produktes j bei der Produktmenge x bestimmen sich durch:

$$S_j(\mathbf{x}) = \frac{PK_j(\mathbf{x})}{x_j C_j} = \frac{PDK_j}{\frac{\partial C}{\partial x_j}}. \tag{94}$$

Nachdem wir nun die zentralen Kostenbegriffe bei Mehrprodukt-Produktion in ihrer allgemeinen Form kennengelernt haben, wollen wir sie anhand von Beispielen und Fallstudien illustrieren.

6.4 Empirische Studien zur Kostenkomplementarität

In diesem Abschnitt sollen empirische Studien vorgestellt werden, die versuchten, das Ausmaß der Kostenkomplementarität in ausgewählten Industriezweigen zu ermitteln. Zu den ersten Studien zählt die Arbeit von Kitching [8], in der über die Ergebnisse einer Befragung von amerikanischen Managern über deren Einschätzung des Potentials der Kostenkomplementaritäten bei Unternehmenszusammenschlüssen berichtet wird. Den Ergebnissen zufolge sind im Durchschnitt die größten Komplementaritäten im Finanzierungsbereich, in immer noch beachtlichem Umfang im Absatzbereich und wesentlich weniger im Produktionsbereich zu vermuten. Die Kostenvorteile im Finanzierungsbereich werden deshalb als bedeutend angesehen, weil der Zugang zum Kapitalmarkt nach der Fusion wesentlich einfacher ist, und die Kapitalkosten deshalb geringer sind als die Summe dieser Kosten vor dem Zusammenschluss.

Baumol und Braunstein [1] untersuchten die potentiellen Kostenkomplementaritäten in der Zeitschriftenindustrie der U.S.A. und fanden, dass bis zu 20 Prozent geringere Produktionskosten anfallen können, wenn eine Spezialisierung auf einen Zeitschriftentyp vermieden wird. Für andere Industriezweige wurden ebenfalls Kostenvorteile durch Komplementaritäten beobachtet. Fuss und Waverman [6] in der kanadischen Telekommunikationsindustrie, Friedlaender et al. [5] in der amerikanischen Automobilindustrie, Murray and White [10] in der kanadischen Kreditwirtschaft und nicht zuletzt Mayo [9] in der amerikanischen Energiewirtschaft konnten teilweise beachtliche Kostenkomplementaritäten empirisch ermitteln.

Es soll nun anhand der deutschen Getränkeindustrie gezeigt werden, wie Kostenkomplementaritäten empirisch ermittelt werden können.

6.5 Komplementaritäten in der Getränkeindustrie

Der Getränkemarkt wird bestimmt durch die Produktgruppen: natürliche Mineralwässer, Limonaden, Fruchtsäfte, Fruchtnektare, Bier, Wein, Sekt, Spirituosen, Kaffee, Tee und Milch. Bedeutsam in diesem Markt sind Bierbrauereien, die neben Bier vornehmlich alkoholfreie Getränke (abgekürzt: AfG) in ihrem Produktprogramm haben. Der Anteil der AfG-Produktion am Gesamtausstoß erreicht bei einigen Brauereien nicht selten einen Anteil von 40 Prozent. Kostenkomplementaritäten lassen sich in folgenden Funktionsbereichen vermuten:

Im *Produktionsbereich* sind die Komplementaritätsvorteile nur gering. Dies liegt daran, weil keine gemeinsamen Grund- und Rohstoffe verwendet werden. Die Grundstoffe für AfG sind Zucker, Essenzen und Säuren, während für Bier Malz, Hopfen und andere Rohstoffe verwendet werden. Die Grundstoffkosten für AfG liegen dabei wesentlich höher als die Rohstoffkosten für Bier. Bedeutende Kostenvorteile können hier nicht realisiert werden, es sei denn, Kostenvorteile können über Rabatte beim Einkauf dieser Einsatzstoffe erzielt werden. Die Herstellungsverfahren gestalten sich ebenfalls unabhängig voneinander. Der Produktionsprozess für AfG ist im Vergleich zum Bier einfacher und damit kostengünstiger. Die Kosten bspw. der sog. Saftküche setzen sich aus den Abschreibungen für die Ausmischanlage und den Personalkosten zusammen. Im Gegensatz dazu sind die Kostenbestandteile bei der Bierherstellung Energie- und Wasserkosten sowie Personalkosten und Abschreibungen. Kostenvorteile lassen sich bestenfalls durch die Nutzung des Personals für beide Herstellungsverfahren realisieren.

Im *Abfüllbereich* sind Kostenvorteile durch gemeinsame Nutzung der Abfüllanlage möglich. Der Umfang dieser Vorteile richtet sich nach der Sorten- und Gebindevielfalt der beiden Produktgruppen. Ist die Produktdifferenzierung sehr ausgeprägt, können hohe Sortenwechselkosten durch Umrüsten der Abfüllanlage entstehen, so dass die Verbundvorteile nicht wirksam werden. Im allgemeinen werden jedoch die Verbundvorteile überwiegen, da durch die enorme Leistungssteigerung von Abfüllanlagen in jüngster Zeit die Umrüstkosten ebenfalls gesenkt werden konnten. Bei den Einsatzstoffen Energie, Wasser, Hilfs- und Betriebsstoffen sowie Instandhaltung können durch degressive Tarife und bessere Ausnutzung vorhandener Ressourcen in geringem Umfang Kosten eingespart werden. Für die übrigen Kostenarten wie für Gebinde- und Aufmachungskosten werden kaum nennenswerte Verbundvorteile zu realisieren sein, weil die Gebinde für AfG und Bier zu unterschiedlich sind.

Der *Absatzbereich* bietet im Vergleich zu den übrigen Bereichen das größte Potential für Verbundvorteile. Die Absatzkosten hängen sehr stark von den gewählten Absatzwegen ab, dabei ist der Absatzweg Lebensmitteleinzelhandel der kostenintensivste. Unter den Kostenarten im Absatzbereich können die Transportkosten durch Beiladungen von AfG und durch den Einsatz kosteneffizienter Transportmedien gesenkt werden. Allerdings bietet hier die Kapazität des Transportmediums eine Grenze für die Realisierung von Verbundvorteilen. Ein anderes Kostensenkungspotential bietet die Werbung in Form der Gemeinschaftswerbung. Die Verbundvorteile können sich außerdem auf die übrigen Kostenarten auswirken, indem bspw. das Verkaufspersonal für beide Produktbereiche gleichzeitig und damit effektiver eingesetzt werden kann.

Im *Verwaltungsbereich* werden die Verbundvorteile bestenfalls gering sein. Sie können durch Management- und Verwaltungserfahrung entstehen, die auf die neue Produktgruppe übertragen werden können.

Zur Ermittlung der Komplementaritätsvorteile für Brauereien, die AfG im Produktprogramm haben, wird eine *quadratische Kostenfunktion* unterstellt, die in der allgemeinen Form wie folgt geschrieben werden kann:

$$C(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot F_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j. \tag{95}$$

Für den hier relevanten Zwei-Produkt-Fall (Bier und AfG) kann die Kostenfunktion folgendermaßen dargestellt werden:

$$C(x_1,x_2) = a_0+a_1\cdot F_1+a_2\cdot F_2+b_1\cdot x_1+b_2\cdot x_2+\frac{1}{2}\cdot b_3\cdot x_1^2+\frac{1}{2}\cdot b_4\cdot x_2^2+\frac{1}{2}\cdot b_5\cdot x_1\cdot x_2 \tag{96}$$

Die quadratische Kostenfunktion besitzt die nützliche Eigenschaft auch für den Fall definiert zu sein, wenn eines der beiden Produkte nicht hergestellt wird. Diese Eigenschaft ist insofern wichtig, weil in die empirische Schätzung auch Daten von spezialisierten Unternehmen eingehen sollen, die entweder nur Bier oder nur AfG herstellen. Betrachtet man die obige Kostenfunktion etwas genauer, dann werden die Gesamtkosten von den allgemeinen fixen Kosten a_0, den produktspezifischen fixen Kosten a_iF_i ($F_i := 0,1$-Variable), den produktspezifischen variablen Kosten und den variablen Kosten der Interaktion der Ausstoßmengen beeinflusst. Das Vorzeichen des Interaktionsparameters b_5 wird Aufschluss darüber geben, ob Verbundvorteile vermutet werden können. Das Ausmaß an Verbundvorteilen wird allerdings nicht allein vom Parameter b_5, sondern auch von den fixen Kosten und der Mengenkombination beeinflusst. Ermitteln lässt sich das Ausmaß an den Verbundvorteilen wie folgt:

$$V_G(x_1,x_2) = \frac{(a-\frac{1}{2}\cdot b_5\cdot x_1\cdot x_2)}{C(x_1,x_2)}, \tag{97}$$

wobei $a = a_0 + a_1 + a_2$ die gesamten Fixkosten sind. Verbundvorteile sind vorhanden ($V_G > 0$), wenn $a > \frac{1}{2}\cdot b_5\cdot x_1\cdot x_2$ bzw. $b_5 < \frac{2a}{x_1\cdot x_2}$ ist.

Ebenso einfach lässt sich das Ausmaß der Größenvorteile (globale Skalenerträge) ermitteln. Zunächst dasjenige des Mehr-Produkt-Unternehmens:

$$S_G(x_1,x_2) = \frac{C(x_1,x_2)}{b_1\cdot x_1+b_2\cdot x_2+b_3\cdot x_1^2+b_4\cdot x_2^2+b_5\cdot x_1\cdot x_2}$$

Für $0 < S_G < \infty$ nehmen die Strahlendurchschnittskosten einen U-förmigen Verlauf für irgendeinen Gütervektor auf dem betrachteten Strahl an. Falls $S_G > 1$ sind Größenvorteile auf dem gesamten Strahl vorhanden.

Das Ausmaß der produktspezifischen Größenvorteile lässt sich wie folgt ermitteln:

$$SP_G(x_i) = \frac{a_j - a_i + b_i\cdot x_i + \frac{1}{2}b_{i+2}\cdot x_i^2 + \sum_{j\neq i} b_{ij}\cdot x_i\cdot x_j}{b_i\cdot x_i + b_{i+2}\cdot x_i^2 + \sum_{j\neq i} b_{ij}\cdot x_i\cdot x_j},$$

für $i,j = 1,2$ und $j \neq i$. Produktspezifische Größenvorteile sind vorhanden, falls $SP_i > 1$ ist.

Tabelle 1

	Variable	Parameter	Schätzwerte (t-Werte)
	Fixkosten	a_0	-31,025
F_{Bier}	produktspezifische Fixkosten	a_1	5.497,213 (0,46)
F_{AfG}	produktspezifische Fixkosten	a_2	5.491,937** (2,62)
x_1	Bier	b_1	68,676** (19,67)
x_2	AfG	b_2	7,265** (2,75)
x_1^2	Bier^2	b_3	0,018** (17,40)
x_2^2	AfG^2	b_4	0,046 (1,14)
$x_1 \cdot x_2$	Interaktion	b_5	0,055** (12,63)
**: Signifikant zum 1% Niveau		adj. R^2 :	$0,947$
		F :	$137,221$

Zur empirischen Ermittlung der Parameter a_i und b_i wurde für 62 Unternehmen die Ausstoßmenge für Bier und AfG sowie die Selbstkosten im Jahre 1980 ermittelt.[3] Von diesen 62 Unternehmen produzieren 42 Unternehmen Bier und AfG, 16 Unternehmen nur Bier und vier Unternehmen nur AfG. Tabelle 1 fasst die Ergebnisse der Parameterschätzung zusammen. Die Schätzung wurde mit der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Die geschätzten Parameter sind teilweise statistisch hoch signifikant zum 1%-Niveau. Die Parameterwerte b_3 und b_4 der quadratischen Ausstoßvariablen haben beide ein positives Vorzeichen und liegen dicht beim Wert Null. Sie verdeutlichen dadurch, dass die Kostenfunktionen der Unternehmen konvex und sehr flach verlaufen. Demnach existiert ein Ausstoßbereich entlang des Strahls, wo Größenersparnisse erzielt werden können. Ab einer bestimmten Ausstoßmenge, die üblicherweise eine effiziente Betriebsgröße konstituiert, ist dann nur noch mit Kostennachteilen zu rechnen.

Der Parameterwert b_5 des Interaktionsausdrucks weist entgegen unserer Erwartung ein positives Vorzeichen auf. Da dieser Wert dicht bei Null liegt, werden die Komplementaritätvorteile sehr gering sein. Wie groß die Verbundvorteile sein werden, erfahren wir, wenn die geschätzen Parameter in die Gleichung (16) eingesetzt werden. Tabelle 2 fasst die *Ergebnisse* der Berechnungen zusammen.

[3] Die Selbstkosten sind die Summe aus Herstellkosten und Vertriebskosten. Die Herstellkosten bilden die Summe aus Materialkosten, Personalkosten und Abschreibungen auf Sachanlagen. Die Vertriebskosten wurden durch die Hälfte der sonstigen Aufwendungen approximiert.

Die Ergebnisse zeigen unmittelbar, dass Bereiche von Bier/AfG-Kombinationen existieren, die Verbundvorteile erwarten lassen. In den Genuss dieser Vorteile scheinen vornehmlich kleinere MPUs zu kommen. Deren Kostenersparnis kann bei einer Mengenkombination von 300.000 Hektoliter Bier und 50.000 Hektoliter AfG immerhin 27 Prozent der Gesamtkosten betragen. Mit zunehmendem Wachstum des MPUs werden die Verbundvorteile immer geringer, und die Verbundnachteile gewinnen immer stärker an Bedeutung. Bei einer Mengenkombination von 4 Mill. Hektoliter Bier und 2 Mill. Hektoliter AfG sind die Kosten des MPUs um 27,3 Prozent höher als die Summe der Kosten spezialisierter Unternehmen.

Tabelle 2

	Vebundvorteile						
AfG/Bier	300	500	1.000	1.500	2.000	3.000	4.000
300	0,218	0,124	0,028	-0,008	-0,026	-0,041	-0,046
500	0,150	0,066	-0,028	-0,057	-0,073	-0,087	-0,087
1.000	0,040	-0,028	-0,110	-0,144	-0,160	-0,171	-0,171
1.500	-0,011	-0,071	-0,154	-0,193	-0,214	-0,229	-0,231
2.000	-0,034	-0,089	-0,173	-0,217	-0,243	-0,267	-0,273
	Globale Größenersparnisse						
AfG/Bier	300	500	1.000	1.500	2.000	3.000	4.000
300	1,166	1,046	0,922	0,863	0,823	0,770	0,734
500	1,004	0,940	0,862	0,820	0,790	0,747	0,717
1.000	0,769	0,763	0,748	0,733	0,721	0,698	0,679
1.500	0,664	0,671	0,676	0,675	0,671	0,661	0,650
2.000	0,611	0,619	0,630	0,635	0,635	0,632	0,626
	Produktspez. Größenersparnisse für Bier						
AfG/Bier	300	500	1.000	1.500	2.000	3.000	4.000
300	0.970	0,952	0,913	0,880	0,851	0,806	0,771
500	0,974	0,957	0,921	0,890	0,864	0,820	0,786
1.000	0,979	0,966	0,937	0,910	0,887	0,848	0,816
1.500	0,982	0,972	0,947	0,924	0,904	0,868	0,839
2.000	0,985	0,976	0,954	0,934	0,916	0,884	0,856
	Produktspez. Größenersparnisse für AfG						
AfG/Bier	300	500	1.000	1.500	2.000	3.000	4.000
300	0,817	0,858	0,910	0,934	0,947	0,963	0,971
500	0,754	0,801	0,865	0,898	0,918	0,941	0,954
1.000	0,670	0,715	0,788	0,831	0,859	0,895	0,916
1.500	0,628	0,668	0,737	0,783	0,815	0,857	0,884
2.000	0,603	0,637	0,702	0,747	0,780	0,826	0,856
Mengenangaben in 1.000 Hektoliter pro Jahr							

Tabelle 2 zeigt darüberhinaus das Ausmaß der globalen und produktspezifischen Skalenerträge. Demnach ist die Strahlendurchschnittskostenkurve U-förmig und es lassen sich globale Größenvorteile nur auf dem Strahl mit Produktvektoren realisieren, die relativ geringen Ausstoßmengen der beiden Produkte repräsentieren, und zwar solange $S_G > 1$ ist. Ein anderes Bild erhält man bei den produktspezifischen Größenvorteilen. Zwar können für relativ geringe Mengenkombinationen produktspezifische Größenvorteile erwartet werden, aber sie stellen sich auch bei weitgehender Spezialisierung auf nur ein Produkt ein.

Wie können die Ergebnisse interpretiert werden? Die Ergebnisse zeigen, dass Verbundvorteile in erster Linie in Unternehmen mit relativ geringer Gesamtausstoßmenge zu realisieren sind. Dasselbe gilt für globale Größenvorteile. Für größere Ausstoßmengen lassen sich dagegen produktspezifische Skalenerträge erzielen. Zahlreiche Brauereiunternehmen müssen diese Abhängigkeit der Verbundvorteile und Größenvorteile von Mengenkombinationen antizipiert haben. Es ist auffallend, dass alle in der Stichprobe befindlichen Brauereiunternehmen relativ geringe Mengen an AfG eigenproduzieren. Danach werden größere Mengen an AfG in spezialisierten Unternehmen hergestellt.

Literatur

[1] Baumol, William J. und Yale M. Braunstein, Empirical Study of Scale Economies and Production Complementarity: The Case of Journal Publication, *Journal of Political Economy*, Band 85, Nr. 5, 1977, S. 1037-1048.

[2] Chambers, Robert G., *Applied Production Analysis, A Dual Approach,* Cambridge, 1988.

[3] Ellinger, Theodor, und Reinhardt Haupt, Produktions- und Kostentheorie, Stuttgart 1996

[4] Fandel, Günter, Produktion I, Produktions- und Kostentheorie, Berlin et al. 1991

[5] Friedlaender, Ann F. und Clifford Winston und Kung Wang, Costs, Technology, and Productivity in the U.S. Automobile Industry, *Bell (Rand) Journal of Economics*, Band 14, Nr. 1, Frühjahr, 1983, S. 1-20.

[6] Fuss, Melvyn A. und Lennard Waverman, Regulation of the Multiproduct Firm: The Case of Telecommunications in Canada, in: Gary Fromm (Hrsg.), *Studies in Public Regulation*, MIT Press: Cambridge, 1981, S. 277-313.

[7] Hicks, J.R., Annual Survey of Economic Theory: Monopoly, Econometrica, Vol. 3, S. 1-20.

[8] Kitching, John, Why Do Mergers Miscarry?, *Harvard Business Review*, Band 45, Nr. 6, November-Dezember, 1967, S. 87-111.

[9] Mayo, John W., Multiproduct Monopoly, Regulation, and Firm Costs, *Southern Economic Journal*, Band 51, Nr. 1, July, 1984, S. 208-218.

[10] Murray, John D. und Robert W. White, Economies of Scale and Economies of Scope in Multiproduct Financial Institutions: A Study of British Columbia Credit Unions, *Journal of Finance*, Juni, 1983, S. 887-902.

[11] Schwalbach, Joachim, *Diversifizierung, Risiko und Erfolg industrieller Unternehmen*, Berlin, 1987.

[12] Schwalbach, Joachim, Economies of Scope in the German Beverage Industry, Discussion Paper FS IV 88-11, Wissenschaftszentrum Berlin.

[13] Steven, Marion, Produktionstheorie, Wiesbaden 1998